REVISTA TÓPICOS
ISSN 2965-6672 | Qualis A2

NOVA ESTRATÉGIA DIDÁCTICA PARA A RESOLUÇÃO DE INTEGRAIS DE FUNÇÕES RACIONAIS DO TIPO $\int F(X)/(AX-B)^m\,DX$, $M \in \mathbb{Q}^*$, APLICANDO O DESENVOLVIMENTO DE TAYLOR NA 12.ª CLASSE, NA ESCOLA TÉCNICA AGRÁRIA DO TCHIVINGUIRO N.º 702 – HUMPATA

NEW DIDACTIC STRATEGY FOR SOLVING INTEGRALS OF RATIONAL FUNCTIONS OF THE TYPE $\int F(X)/(AX-B)^m\,DX$, $M \in \mathbb{Q}^*$, APPLYING TAYLOR EXPANSION IN THE 12TH GRADE AT ESCOLA TÉCNICA AGRÁRIA DO TCHIVINGUIRO N.º 702 – HUMPATA

Ciências Exatas e da Terra • 21/11/2026

REGISTRO DOI: 10.70773/revistatopicos/795187081

Angelino Camole[1]

Constantino Mussungo Kapitango Tchombossi[2]

Faustino Satchimuco Capitango[3]

RESUMO

A presente investigação analisa a aplicação do desenvolvimento de Taylor como estratégia didáctica inovadora no ensino e aprendizagem de integrais de funções racionais do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx, m ∈ ℚ*, na 12.ª classe da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702, no município da Humpata, província da Huíla. O estudo surge das dificuldades persistentes manifestadas pelos estudantes na resolução de integrais racionais através dos métodos operatórios tradicionais, como a decomposição em frações parciais, situação que compromete o raciocínio analítico e a aprendizagem significativa no cálculo integral. Adoptou-se uma abordagem metodológica mista (quantitativa e qualitativa) num estudo de campo de natureza aplicada e delineamento descritivo-explicativo. A população compreendeu 110 alunos e 2 professores de Matemática da 12.ª classe, sendo a amostra constituída por 55 alunos (50% da população estudantil, selecionada por conveniência) e os 2 docentes (100% censitário). Utilizaram-se como instrumentos de recolha de dados questionários estruturados tipo Likert, entrevistas semiestruturadas, grelhas de observação directa das aulas e testes pedagógicos emparelhados (pré-teste e pós-teste). A intervenção didáctica centrou-se na reescrita de polinómios dividendos f(x) em séries de potências centradas na raiz do divisor $x_0 = b/a$, transformando expressões racionais complexas em somas polinomiais simples de fácil integração termo a termo. Os resultados quantitativos demonstraram uma evolução altamente expressiva no desempenho médio global dos estudantes, que elevou de 8,4 valores no pré-teste para 14,2 valores no pós-teste (numa escala de 0 a 20 valores), representando um ganho médio líquido de 5,8 valores (melhoria de 69%). Constatou-se que 72% dos alunos apresentaram melhoria significativa no desempenho individual. Os dados qualitativos confirmaram maior compreensão conceptual,

incremento substancial da participação activa em sala de aula e redução da ansiedade matemática perante conteúdos fraccionários complexos. Conclui-se que o desenvolvimento de Taylor constitui uma ponte cognitiva e metodológica eficaz para o ensino secundário técnico angolano.
Palavras-chave: Desenvolvimento de Taylor; Ensino da Matemática; Integrais Racionais; Estratégia Didáctica; Educação Matemática em Angola.

ABSTRACT

This study analyses the application of Taylor expansion as an innovative didactic strategy in the teaching and learning of rational function integrals of the type ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx, m ∈ ℚ*, in the 12th grade at Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702, located in Humpata municipality, Huíla province. The research emerges from persistent difficulties students face when solving rational integrals using traditional operational methods, such as partial fraction decomposition, which compromises analytical reasoning and meaningful learning in calculus. Methodologically, the research adopted a mixed-method approach (quantitative and qualitative) in an applied field study with a descriptive-explanatory design. The population consisted of 110 students and 2 Mathematics teachers, with a sample of 55 students (50% selected by convenience) and 2 teachers (100% census). Data collection instruments included structured Likert questionnaires, semi-structured interviews, direct classroom observation grids, and paired pedagogical tests (pre-test and post-test). The didactic intervention focused on rewriting dividend polynomials f(x) into power series centered at the divisor root $x_0 = b/a$, transforming complex rational expressions into simple polynomial sums easy to integrate term by term. Quantitative results showed a highly significant increase in average student

performance, rising from 8.4 marks in the pre-test to 14.2 marks in the post-test (on a 0–20 scale), representing a net average gain of 5.8 marks (a 69% improvement). Furthermore, 72% of students demonstrated significant individual performance improvement. Qualitative findings confirmed enhanced conceptual understanding, increased active participation, and reduced mathematical anxiety, validating the pedagogical efficacy of the proposed strategy.
Keywords: Taylor Expansion; Mathematics Teaching; Rational Integrals; Didactic Strategy; Mathematics Education in Angola.

1. INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem do cálculo diferencial e integral no ensino secundário técnico constituem um dos domínios mais complexos e desafiadores da Educação Matemática contemporânea. No contexto angolano, e em particular no subsistema de ensino técnico-profissional, a disciplina de Matemática desempenha um papel fulcral na formação do raciocínio lógico-dedutivo, na capacidade de abstração e na preparação dos alunos para resolver problemas científicos e aplicados nas ciências agrárias, engenharias e tecnologias.

Entre os conteúdos programáticos da 12.ª classe, a resolução de integrais de funções fraccionárias do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx, com m ∈ ℚ*, exige dos estudantes não apenas o domínio de algoritmos e rotinas operatórias, mas também uma profunda compreensão estrutural e funcional. Contudo, no contexto prático da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702, localizada no município da Humpata, província da Huíla, observa-se que um número expressivo de alunos evidencia limitações acentuadas na manipulação

algébrica e na aplicação intuitiva dos métodos clássicos de integração.

A problemática investigada fundamenta-se na constatação empírica e bibliográfica de que o ensino tradicional das integrais racionais assenta predominantemente numa abordagem algorítmica, mecanicista e memorística. Nessa abordagem convencional, os estudantes aplicam regras pré-formatadas de decomposição em frações parciais ou substituições algébricas morosas sem apreenderem os fundamentos conceptuais subjacentes. Como apontam Borji e Font (2021), metodologias focadas exclusivamente na resolução procedimental tendem a inibir o desenvolvimento do pensamento crítico, da flexibilidade cognitiva e da criatividade matemática.

Diante desse diagnóstico pedagógico, emerge o seguinte problema de investigação: De que forma a aplicação do desenvolvimento de Taylor pode contribuir para melhorar o ensino e a aprendizagem das integrais de funções racionais do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx, m ∈ ℚ*, na 12.ª classe da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702 – Humpata?

Para responder a este problema, o estudo definiu como objetivo geral avaliar a eficácia pedagógica da aplicação do desenvolvimento de Taylor como nova estratégia didáctica no ensino de integrais racionais do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx no referido contexto escolar. De modo a operacionalizar este objetivo geral, traçaram-se os seguintes objetivos específicos:

1. Diagnosticar as principais dificuldades dos alunos da 12.ª classe na resolução de integrais racionais por métodos

convencionais;

2. Identificar as metodologias de ensino comummente adoptadas pelos professores de Matemática na leccionação do cálculo integral;

3. Conceber e aplicar uma proposta de intervenção pedagógica fundamentada no desenvolvimento de Taylor em séries de potências;

4. Comparar quantitativamente e qualitativamente o desempenho e a compreensão dos estudantes antes e após a intervenção pedagógica;

5. Avaliar a viabilidade e a eficácia didáctica da metodologia no ensino técnico médio angolano.

A justificativa da investigação alicerça-se em três dimensões fundamentais: relevância científica, pedagógica e social. Do ponto de vista científico, o trabalho preenche uma lacuna substancial na literatura sobre a aplicação didáctica de séries de potências no ensino pré-universitário em Angola e no espaço lusófono. Pedagogicamente, disponibiliza aos docentes uma alternativa metodológica estruturada que transforma expressões racionais complexas em somas polinomiais de fácil integração termo a termo, promovendo a articulação entre derivação, séries e integração (García-García; Dolores-Flores, 2020). Socialmente, visa fortalecer o desempenho académico dos alunos do ensino técnico agrário, dotando-os de competências analíticas indispensáveis para o prosseguimento de estudos superiores e para o exercício profissional eficiente.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA OU REVISÃO DA LITERATURA

A presente seção estrutura a base conceitual e o estado da arte que sustentam a investigação. A fundamentação organiza-se em cinco subseções interligadas, articulando teorias da aprendizagem matemática, o ensino do cálculo integral, o rigor analítico da série de Taylor, a transposição didáctica para o ensino técnico e a análise das lacunas identificadas na produção científica contemporânea.

2.1. O Ensino do Cálculo Integral na Educação Matemática Contemporânea

O ensino da Matemática nas últimas décadas passou por profundas transformações epistemológicas e didácticas. Os modelos tradicionais de transmissão passiva, centrados na repetição mecânica de algoritmos e na memorização descontextualizada de fórmulas, têm sido severamente criticados por organismos internacionais de investigação educacional, como o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) e a International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

Segundo Hiebert e Grouws (2020), o ensino eficaz da Matemática deve integrar duas dimensões essenciais: o desenvolvimento da fluência procedimental e a construção da compreensão conceptual. Quando a instrução se concentra exclusivamente na execução cega de rotinas algébricas, os alunos desenvolvem uma visão instrumental da disciplina, tornando-se incapazes de transferir o conhecimento para novas situações-problema. No âmbito do cálculo integral, esta limitação é particularmente visível, uma vez que a integração é frequentemente percebida como uma coleção

desconexa de 'truques de manipulação' em vez de uma operação fundamental da análise matemática.

Investigações conduzidas por Bressoud, Mesa e Rasmussen (2021) no estudo nacional da Mathematical Association of America (MAA) revelaram que uma percentagem significativa de alunos retidos em disciplinas de cálculo não falha por falta de capacidade computacional, mas sim devido à ausência de estruturas conceituais bem consolidadas. Os autores defendem que a transição do cálculo diferencial para o cálculo integral exige uma reorganização cognitiva que permita ao estudante compreender a integração como um processo contínuo de acumulação e como a operação inversa da diferenciação.

2.2. As Teorias da Aprendizagem Matemática Aplicadas Ao Cálculo

Para compreender como os estudantes constroem o conhecimento sobre integrais racionais, a investigação apoia-se nos referenciais da psicologia cognitiva e da Didáctica da Matemática, com destaque para as teorias construtivistas de Jean Piaget e Lev Vygotsky, bem como para o modelo de pensamento matemático avançado de David Tall.

Na perspetiva construtivista piagetiana, a aprendizagem ocorre através dos processos dinâmicos de assimilação, acomodação e equilibração (Sfard, 2021). Quando confrontado com uma integral racional do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx, o estudante tenta assimilá-la aos seus esquemas algébricos prévios. Se os métodos tradicionais se revelarem excessivamente trabalhosos ou confusos, gera-se um desequilíbrio cognitivo. A intervenção pedagógica através do

desenvolvimento de Taylor atua como um elemento facilitador que permite ao aluno reestruturar (acomodar) os seus esquemas mentais, conectando o conceito de derivada de ordens superiores ao processo de expansão polinomial e simplificação funcional.

Por sua vez, Vygotsky destaca o papel insubstituível da mediação pedagógica e da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). A ZDP representa a distância entre o nível de desenvolvimento real (determinado pela capacidade de resolver problemas autonomamente) e o nível de desenvolvimento potencial (determinado pela resolução sob orientação docente ou em colaboração com pares). A estratégia didáctica fundamentada em Taylor atua precisamente como um 'andaime cognitivo' (scaffolding) na ZDP dos alunos, transformando uma tarefa algébrica altamente complexa numa sequência graduada de passos acessíveis.

Ademais, a teoria de David Tall (2019) sobre o desenvolvimento do pensamento matemático avançado enfatiza que o crescimento cognitivo em cálculo depende da capacidade de alternar entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático — representações simbólicas, visuais, numéricas e funcionais. Quando os alunos compreendem que um polinómio dividendo f(x) pode ser reescrito sob a forma de uma série de potências centrada na raiz do divisor x_0, eles efetuam uma mudança de representação que reduz drasticamente a complexidade operatória e fortalece a retenção conceitual.

2.3. Dificuldades Cognitivas e Erros Recorrentes em Integrais Racionais

A literatura em Didáctica da Matemática documenta de forma ostensiva as barreiras específicas enfrentadas pelos estudantes no estudo de funções racionais e sua integração (Loibl; Roll; Rummel, 2020; Borji; Font, 2021). A resolução tradicional da integral ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx via decomposição clássica exige:

a. Divisão longa de polinómios quando o grau de f(x) é maior ou igual a m;

b. Resolução de sistemas de equações lineares com múltiplos parâmetros para determinar coeficientes indeterminados;

c. Substituições algébricas sucessivas que frequentemente resultam em erros de sinal, erros na elevação de potências e confusão nas regras de primitivação.

Como explicam Loibl, Roll e Rummel (2020), quando o algoritmo de resolução impõe uma elevada carga cognitiva estranha (extraneous cognitive load), os recursos mentais da memória de trabalho do estudante são totalmente consumidos pela manipulação de contas intermediárias. Em consequência, o aluno perde a visão global do problema e reduz a resolução a um cumprimento mecânico de passos operatórios propensos ao erro.

A aplicação do desenvolvimento de Taylor intervém diretamente nesta fragilidade cognitiva. Ao substituir a decomposição longa por um cálculo direto de derivadas sucessivas da função f(x) avaliadas no ponto $x_0 = b/a$, elimina-se a necessidade de resolver sistemas lineares extensos. O processo transforma-se num algoritmo limpo e previsível de cinco passos, permitindo ao estudante focar a sua atenção na lógica da integração.

2.4. O Desenvolvimento de Taylor Como Ferramenta Didáctica Facilitadora

O desenvolvimento de Taylor constitui um dos resultados mais elegantes e poderosos da Análise Matemática. Formulada rigorosamente por Brook Taylor e expandida por Colin Maclaurin, a série de Taylor permite expressar qualquer função f(x) infinitamente diferenciável na vizinhança de um ponto x_0 sob a forma de uma série de potências.

Para um polinómio f(x) de grau n, o seu desenvolvimento de Taylor exato em torno do ponto x_0 é dado pela fórmula finita:

$$\mathbf{f(x) = [f(x_0) / 0!] + [f'(x_0) / 1!](x - x_0)^1 + [f''(x_0) / 2!](x - x_0)^2 + \ldots + [f^n(x_0) / n!](x - x_0)^n}$$

Na proposta didáctica concebida para a 12.ª classe, a aplicação desta fórmula a integrais do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx assenta na escolha estratégica do ponto de expansão x_0 como sendo a raiz do binómio do divisor, ou seja, $x_0 = b/a$. Ao expandir o dividendo f(x) em potências de $(x - x_0)$, a fração racional reconfigura-se como:

$$\mathbf{f(x) / (ax-b)^m = \sum [C_k (x - x_0)^k] / [a^m (x - x_0)^m] = \sum A_k (x - x_0)^{k-m}}$$

Esta reescrita transforma uma fração racional complexa numa soma de potências simples de $(x - x_0)$. A integração passa a ser efetuada termo a termo aplicando a regra elementar da potência para integrais: $\int (x - x_0)^p \, dx = [(x - x_0)^{p+1} / (p+1)] + C$ (para $p \neq -1$) e $\int (x - x_0)^{-1} \, dx = \ln|x - x_0| + C$ (para $p = -1$).

Do ponto de vista da Didáctica da Matemática, esta abordagem realiza uma transposição didáctica eficaz (Chevallard) de um

conceito tipicamente universitário (Séries de Taylor) para o nível secundário técnico, demonstrando que ferramentas avançadas podem ser adaptadas para simplificar problemas elementares do cálculo.

2.5. Revisão Crítica da Literatura e Lacunas Identificadas

A análise da produção científica internacional e regional revela contribuições valiosas, mas também importantes omissões no campo da Didáctica do Cálculo.

Estudos conduzidos por García-García e Dolores-Flores (2020) no México investigaram a compreensão de estudantes universitários sobre séries de Taylor, concluindo que a exploração analítica do ponto de expansão x_0 favorece a visualização da aproximação polinomial e a apreensão de conceitos de diferenciação. Na mesma linha, Radmehr e Drake (2021) realizaram uma revisão sistemática que demonstrou o impacto positivo do uso de múltiplas representações no ensino do cálculo.

No entanto, a revisão da literatura evidencia três lacunas fundamentais que justificam a originalidade e a oportunidade da presente investigação:

1. Escassez de aplicações didácticas no ensino secundário técnico: A quase totalidade da literatura sobre séries de Taylor restringe-se ao ensino superior (cursos de Engenharia e Matemática Puríssima), existindo uma carência de modelos pedagógicos adaptados ao ensino médio pré-universitário;

2. Ausência de pesquisas empíricas em contextos africanos e lusófonos: Nota-se reduzida produção científica dedicada a

metodologias alternativas de cálculo em Angola, onde as escolas enfrentam turmas numerosas, escassez de recursos didácticos e predominância de métodos expositivos (Makonye; Fakude, 2021);

3. Desarticulação entre o rigor matemático e a prática de sala de aula: Falta de guias e sequências didácticas estruturadas que orientem os professores no uso operatório de Taylor para resolver problemas específicos do currículo escolar.

3. METODOLOGIA

Para responder ao problema de investigação e testar a eficácia da nova estratégia didáctica com rigor científico, concebeu-se um plano metodológico abrangente. Esta seção detalha a abordagem, o tipo de investigação, a população e amostra, os instrumentos de recolha de dados, os procedimentos éticos e as técnicas de tratamento estatístico e qualitativo.

3.1. Abordagem e Delineamento da Investigação

A investigação adopta uma abordagem metodológica mista (mixed-methods research), combinando de forma integrada métodos quantitativos e qualitativos (Creswell; Creswell, 2023). A escolha da abordagem mista fundamenta-se na necessidade de obter uma compreensão holística do fenómeno educativo: a vertente quantitativa permite mensurar com precisão a evolução estatística do desempenho dos estudantes antes e após a intervenção didáctica, enquanto a vertente qualitativa permite interpretar os significados, percepções, atitudes e dinâmicas de sala de aula vivenciadas por alunos e professores.

Quanto aos seus objetivos, a pesquisa caracteriza-se como descritiva e explicativa. É descritiva porque mapeia e detalha as práticas docentes e as tipologias de erros cometidos pelos alunos no cálculo de integrais. É explicativa porque estabelece relações de causa e efeito entre a aplicação da estratégia didáctica fundamentada em Taylor (variável independente) e a melhoria do desempenho académico e da compreensão conceptual dos alunos (variáveis dependentes).

Relativamente ao meio e à natureza, o estudo classifica-se como uma pesquisa de campo de natureza aplicada, realizada no ambiente real da sala de aula da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702 – Humpata.

3.2. Caracterização da População e Amostra

A definição criteriosa da população e da amostra seguiu as recomendações da amostragem em pesquisas educacionais (Cochran, 2021; Etikan et al., 2020).

A população da investigação compreendeu a totalidade dos intervenientes no processo de ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática da 12.ª classe da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702, no ano lectivo de referência, contabilizando:

- População Estudantil: N = 110 alunos regularmente matriculados nas turmas da 12.ª classe da instituição;
- População Docente: N = 2 professores de Matemática responsáveis pela leccionação dos conteúdos de cálculo integral na referida classe.

Para a composição da amostra estudantil, adotou-se a amostragem não probabilística por conveniência e intencional (Etikan et al., 2020), selecionando-se n = 55 alunos da 12.ª classe, o que representa exatamente 50% da população estudantil total. A seleção considerou critérios de assiduidade, regularidade matricular e concordância em participar nas sessões de intervenção e avaliação.

A amostra docente foi de caráter censitário, incluindo n = 2 professores (100% dos docentes de Matemática da 12.ª classe da escola). A inclusão integral dos docentes garantiu a recolha de dados qualitativos de elevada representatividade sobre as práticas pedagógicas da instituição.

3.3. Instrumentos de Recolha de Dados

Visando assegurar a validação cruzada e a triangulação metodológica dos resultados (Johnson; Christensen, 2020), construíram-se e aplicaram-se quatro instrumentos complementares de recolha de dados:

3.3.1. Questionários Estruturados aos Alunos e Professores (Anexo A)

Aplicou-se um questionário aos 55 alunos da amostra, contendo itens fechados organizados numa escala de Likert de 5 pontos (1 = Discordo Totalmente a 5 = Concordo Totalmente) e questões abertas. O questionário avaliou quatro dimensoes: a) grau de dificuldade percebido nos métodos tradicionais de integração; b) hábitos de estudo e motivação; c) clareza e operacionalidade da estratégia de Taylor; d) autoconfiança pós-intervenção. Aplicou-se igualmente um questionário aos 2 professores para mapear habilitações, experiência didáctica e perceção sobre o currículo.

3.3.2. Testes Pedagógicos Emparelhados — Pré-Teste e Pós-Teste (Anexo B)

Elaboraram-se dois testes de avaliação emparelhados sob o ponto de vista da complexidade matemática e estrutura das questões:

- Pré-teste: Aplicado antes da intervenção, composto por tarefas de resolução de integrais racionais do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx recorrendo aos métodos tradicionais conhecidos pelos alunos (decomposição clássica ou substituição);

- Pós-teste: Aplicado após as sessões de intervenção, composto por integrais equivalentes, exigindo a aplicação expressa do desenvolvimento de Taylor.

3.3.3. Entrevistas Semiestruturadas aos Professores (Anexo C)

Realizaram-se entrevistas individuais semiestruturadas com os 2 docentes da disciplina. Os guiões abordaram as estratégias de ensino habituais, as principais fragilidades de aprendizagem observadas nas turmas, a recetividade à proposta pedagógica de Taylor e a viabilidade da sua inclusão no planeamento curricular contínuo.

3.3.4. Grelhas de Observação Directa das Aulas (Anexo D)

Utilizaram-se grelhas de observação estruturada durante todas as sessões lectivas de intervenção. Registraram-se indicadores qualitativos relacionados com a atenção dos alunos, o nível de interação com o professor, a frequência de dúvidas levantadas, a autonomia no trabalho individual e em grupo, e o clima emocional da sala de aula.

3.4. Procedimentos de Aplicação e Ética da Investigação

A recolha de dados desenvolveu-se cumprindo rigorosamente as seguintes fases e princípios éticos:

1. Autorização Institucional: Solicitação e obtenção de parecer favorável junto da Direção da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702 – Humpata;

2. Consentimento Informado: Esclarecimento detalhado aos alunos e professores sobre os objetivos da pesquisa, garantindo a participação voluntária, o anonimato das respostas e a confidencialidade absoluta dos dados;

3. Calendarização das Ações: A intervenção decorreu ao longo de um bloco intensivo de sessões pedagógicas, divididas em fase diagnóstica (pré-teste), fase de leccionação da estratégia de Taylor e fase de avaliação final (pós-teste).

3.5. Técnicas de Análise de Dados e Triangulação Metodológica

Os dados quantitativos obtidos nos testes e questionários foram tabulados e submetidos a estatística descritiva (frequências absolutas, percentagens, médias aritméticas e desvios) para comparar o desempenho pré e pós-intervenção.

Os dados qualitativos provenientes das entrevistas e observações foram analisados mediante a técnica de Análise de Conteúdo Temática (Flick, 2020), emergindo categorias analíticas como 'Compreensão Conceptual', 'Redução da Carga Operatória' e 'Motivação e Autonomia'.

Por fim, realizou-se a triangulação metodológica de dados, cruzando os resultados dos testes estatísticos com os depoimentos dos professores e as notas de observação, garantindo a consistência interna e a validade científica das conclusões obtidas.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES OU ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção apresentam-se, de forma integrada e pormenorizada, os dados empíricos recolhidos durante a investigação na Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro. A exposição organiza-se em seis subseções que cobrem desde a descrição da intervenção didáctica até à análise crítica e discussão dos achados à luz da literatura especializada.

4.1. Descrição Pormenorizada da Intervenção Pedagógica

A proposta didáctica baseada no desenvolvimento de Taylor foi estruturada e executada em três fases perfeitamente articuladas:

- Fase 1 — Diagnóstico Inicial (Pré-teste): Aplicação do teste inicial contendo integrais fraccionárias do tipo ∫ [f(x) / (ax-b)^m] dx. Os resultados confirmaram um fraco domínio algébrico, com a maioria dos alunos a cometer erros graves na tentativa de decomposição em frações parciais ou a desistir da resolução por incapacidade de estruturar os passos operatórios.

- Fase 2 — Intervenção Pedagógica (Ensino da Estratégia de Taylor): Apresentação da nova estratégia aos estudantes. Explicou-se que qualquer polinómio dividendo f(x) de grau n pode ser exatamente reescrito em potências da base $(x - x_0)$, onde x_0 é a raiz do divisor $g(x) = ax - b = 0 \Rightarrow x_0 = b/a$. Mostrou-se como o cálculo das derivadas sucessivas $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^n(x_0)$ permite obter imediatamente os coeficientes do

desenvolvimento, transformando a fração racional numa soma de termos simples de integração direta.

- Fase 3 — Avaliação Final (Pós-teste): Aplicação do teste de avaliação equivalente para mensurar os ganhos cognitivos, a rapidez de execução e a capacidade de retenção dos estudantes.

4.2. Demonstração Matemática Detalhada do Modelo Aplicado em Sala de Aula

Para ilustrar de forma clara e incontestável o modelo didáctico ensinado aos alunos da 12.ª classe da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro, apresenta-se a seguir a resolução completa e passo a passo da integral modelo trabalhada durante a intervenção pedagógica:

Integral Modelo Resolvida em Sala de Aula:
$\int [(x^3 - x + 2) / (x - 1)^4] dx$

- 1.º Passo: Identificação da raiz do divisor $g(x) = x - 1$
  Iguala-se o divisor a zero para determinar o ponto de desenvolvimento x_0:
  $x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$

- 2.º Passo: Avaliação da imagem da função dividendo $f(x) = x^3 - x + 2$ em $x_0 = 1$
  $f(1) = (1)^3 - (1) + 2 = 1 - 1 + 2 = 2$

- 3.º Passo: Cálculo das derivadas sucessivas do dividendo f(x) até à ordem n+1 (n = 3)
  1) $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 3(1)^2 - 1 = 2$

2) $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6(1) = 6$

3) $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6$

4) $f^4(x) = 0 \Rightarrow f^4(1) = 0$

- 4.º Passo: Expansão de f(x) em potências de base (x - 1) pela Fórmula de Taylor

  $f(x) = [f(1)/0!] + [f'(1)/1!](x-1)^1 + [f''(1)/2!](x-1)^2 + [f'''(1)/3!](x-1)^3$

  $f(x) = (2/1) + (2/1)(x-1) + (6/2)(x-1)^2 + (6/6)(x-1)^3$

  $f(x) = 2 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

- 5.º Passo: Substituição na integral e integração termo a termo

  $\int [(x^3 - x + 2) / (x - 1)^4] dx = \int [(2 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3) / (x - 1)^4] dx$

  $= \int [2(x-1)^{-4} + 2(x-1)^{-3} + 3(x-1)^{-2} + (x-1)^{-1}] dx$

  $= 2 \cdot [(x-1)^{-3} / (-3)] + 2 \cdot [(x-1)^{-2} / (-2)] + 3 \cdot [(x-1)^{-1} / (-1)] + \ln|x-1| + C$

  $= - [2 / (3(x-1)^3)] - [1 / ((x-1)^2)] - [3 / (x-1)] + \ln|x-1| + C$

Como se pode comprovar pela resolução exposta, o método de Taylor elimina completamente a necessidade de montar e resolver sistemas de equações algébricas lineares com quatro incógnitas, reduzindo o problema a derivações elementares e integrais de potências imediatas.

4.3. Análise Quantitativa Pormenorizada dos Dados

A análise estatística dos dados recolhidos junto dos 55 alunos da amostra confirmou um salto qualitativo e quantitativo extraordinário no desempenho académico. A Tabela 1 apresenta a comparação direta entre as médias obtidas no pré-teste e no pós-teste.

Momento de Avaliação	N.º de Alunos (n)	Média (0-20)	Interpretação Pedagógica

Pré-teste (Métodos Tradicionais)	55	8,4 valores	Desempenho Insuficiente / Baixo
Pós-teste (Estratégia de Taylor)	55	**14,2 valores**	Desempenho Elevado / Satisfatório

Os dados da Tabela 1 evidenciam que a média global da turma subiu de 8,4 valores no pré-teste para 14,2 valores no pós-teste, registando um ganho médio líquido de 5,8 valores (uma melhoria percentual aproximada de 69%).

Para detalhar como essa evolução se distribuiu entre os estudantes da amostra, a Tabela 2 categoriza a progressão do desempenho individual.

Categoria de Desempenho	Frequência (n)	Percentagem (%)	Impacto Observado
Melhoria Significativa (≥ +4 valores)	40	**72%**	Evolução Positiva Elevada
Desempenho Estável (Variação ±1 val.)	10	18%	Manutenção do Nível
Melhoria Ligeira (+2 a +3 valores)	5	10%	Progressão Moderada
TOTAL	**55**	**100%**	—

Como se observa na Tabela 2, 72% dos estudantes (40 alunos) registaram uma melhoria significativa no seu desempenho individual, enquanto 18% mantiveram o nível estável e 10% apresentaram melhorias ligeiras. NENHUM aluno apresentou regressão de nota após a intervenção didáctica.

Para fundamentar a análise da redução das dificuldades cognitivas, a Tabela 3 detalha a taxonomia dos erros mais frequentes identificados nos testes antes e depois da intervenção didáctica.

Tipologia de Erro Observado	Frequência Pré-teste	Frequência Pós-teste	Redução de Erros (%)
Erros na decomposição de frações parciais	42 alunos (76%)	4 alunos (7%)	**-90.5%**
Erros no cálculo de sistemas lineares	38 alunos (69%)	0 alunos (0%)*	**-100.0%**
Erros de sinal na elevação de potências	29 alunos (53%)	6 alunos (11%)	**-79.3%**
Omissão da constante de integração C / ln|x|	35 alunos (64%)	8 alunos (15%)	**-77.1%**

(* Nota referente à Tabela 3: A frequência de erros em sistemas lineares no pós-teste foi de 0% porque a estratégia de Taylor elimina totalmente a necessidade de resolver sistemas lineares para frações do tipo proposto).

4.4. Análise Qualitativa dos Questionários, Entrevistas e Observações

A triangulação dos dados qualitativos provenientes dos questionários tipo Likert, das entrevistas com os 2 professores e das grelhas de observação permitiu extrair conclusões profundas sobre a vertente comportamental e cognitiva dos estudantes.

- Questionários dos Alunos: 88% dos estudantes responderam 'Concordo Totalmente' ou 'Concordo' relativamente à afirmação de que o desenvolvimento de Taylor tornou a resolução de

integrais racionais mais simples e rápida do que o método ensinado anteriormente. 84% afirmaram sentir maior confiança para resolver exercícios de cálculo autonomamente.

- Entrevistas com os Professores: Os 2 docentes entrevistados salientaram unanimously que a estratégia atuou como uma 'ponte didáctica perfeita'. Um dos professores destacou: 'Antes, os alunos perdiam-se em páginas de contas algébricas para achar os coeficientes das frações parciais e desistiam. Com o método de Taylor, eles aplicam derivadas sucessivas que já dominam bem, acham os números diretamente e integram sem medo.' O segundo docente acrescentou que a proposta permitiu fazer uma revisão prática e integrada de derivadas no exato momento em que se leccionavam integrais.

- Observação de Sala de Aulas: As grelhas de observação registaram uma mudança visível no clima pedagógico. Notou-se um aumento expressivo no número de alunos a deslocarem-se ao quadro para resolver exercícios voluntariamente, uma diminuição drástica do tempo médio gasto por exercício (de ~25 minutos no pré-teste para ~8 minutos no pós-teste) e a erradicação do bloqueio emocional perante tarefas de integração fraccionária.

4.5. Discussão Crítica dos Resultados à Luz da Literatura

Os achados empíricos obtidos na Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro corroboram de forma consistente os referenciais teóricos da Educação Matemática contemporânea.

O salto qualitativo verificado fundamenta-se na teoria de David Tall (2019) sobre o desenvolvimento do pensamento matemático

avançado. Ao reconfigurar f(x) através da expansão de Taylor centrada em $x_0 = b/a$, o estudante deixa de encarar a integral fraccionária como uma barreira algébrica intransponível e passa a interpretá-la como uma combinação linear de potências simples. Essa mudança de representação fortalece o flexibilidade cognitiva e permite ao aluno articular os conhecimentos de diferenciação e integração (Stewart, 2020).

Além disso, a acentuada redução da carga cognitiva verificada confirma a teoria de Loibl, Roll e Rummel (2020): quando a complexidade operatória é atenuada por um algoritmo elegante, os recursos da memória de trabalho dos alunos redirecionam-se para a compreensão dos conceitos fundamentais do cálculo. Contudo, tal como salientam Borji e Font (2021), é necessário ressalvar que a aplicação bem-sucedida de Taylor pressupõe que os estudantes possuam um domínio prévio firme das regras de derivação elementar.

4.6. Limitações do Estudo

Apesar do rigor metodológico e dos resultados altamente favoráveis, a presente pesquisa apresenta algumas limitações que devem ser tidas em conta:

1. Dimensão Amostral: A investigação restringiu-se a uma amostra de 55 estudantes de uma única instituição (Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro);

2. Janela Temporal: A intervenção ocorreu num período delimitado, não contemplando um acompanhamento longitudinal para testar a retenção a longo prazo;

3. Tipologia de Integrais: A proposta focou-se em divisores binómios da forma $(ax-b)^m$, exigindo estudos adicionais para divisores quadráticos irredutíveis.

5. CONCLUSÃO / CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação permitiu avaliar de forma sistemática e rigorosa a aplicação do desenvolvimento de Taylor como nova estratégia didáctica no ensino de integrais de funções racionais do tipo $\int [f(x) / (ax-b)^m] dx$, $m \in \mathbb{Q}^*$, na 12.ª classe da Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702 – Humpata.

Os resultados obtidos fornecem uma resposta perentória e altamente positiva ao problema de investigação formulado. Confirmou-se integralmente a hipótese de trabalho, demonstrando-se estatisticamente que a introdução da expansão de Taylor promove uma melhoria expressiva no desempenho académico dos estudantes, traduzida pela elevação da média de 8,4 para 14,2 valores (um ganho médio de 5,8 valores e 72% de alunos com melhoria significativa). Do ponto de vista conceptual, a metodologia comprovou ser altamente eficaz ao transformar algoritmos fraccionários morosos em somas de potências de integração imediata, promovendo a autonomia cognitiva e o raciocínio analítico.

Como contributos principais, o estudo estabelece que a expansão de Taylor actua como um catalisador didáctico no ensino secundário técnico angolano, desmistificando a complexidade do cálculo integral e integrando harmonicamente conceitos de derivada, série e integral.

Com base nas conclusões alcançadas, formulam-se as seguintes recomendações práticas:

- Para os Professores de Matemática: Integrar progressivamente o desenvolvimento de Taylor no planeamento didáctico do cálculo integral; reforçar o ensino articulado de derivadas e séries antes da introdução de técnicas de integração; e privilegiar metodologias activas que estimulem a exploração conceptual;

- Para as Instituições de Ensino e Gestores Educacionais: Promover acções de formação contínua em Didáctica da Matemática focadas em metodologias inovadoras; incentivar a elaboração de manuais didácticos contextualizados à realidade angolana; e apoiar projectos de investigação-ação nas escolas técnicas secundárias.

Para futuras investigações, sugere-se a ampliação do estudo a amostras mais abrangentes noutras províncias de Angola, a realização de pesquisas longitudinais para avaliar a retenção de conceitos no ensino superior e a integração de softwares de geometria dinâmica e computação algébrica no ensino de séries de potências.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORJI, Viviana; FONT, Vicenç. The role of mathematical representations in problem solving. Mathematics, Basel, v. 9, n. 4, p. 405, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.3390/math9040405. Acesso em: 14 out. 2025.

BRESSOUD, David M.; MESA, Vilma; RASMUSSEN, Chris. Insights and recommendations from the MAA national study of college calculus. The Mathematics Enthusiast, Missoula, v. 18, n. 1, p. 3-29, 2021.

Disponível em: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1520. Acesso em: 20 jan. 2026.

CAMOLE, Angelino. Nova estratégia didáctica para a resolução de integrais de funções racionais do tipo $\int [f(x) / (ax-b)^m] dx$, $m \in \mathbb{Q}^*$, aplicando o desenvolvimento de Taylor na 12.ª classe, na Escola Técnica Agrária do Tchivinguiro n.º 702 – Humpata. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla, Lubango, 2026.

COCHRAN, William G. Sampling techniques. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2021.

CRESWELL, John W.; CRESWELL, J. David. Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches. 6th ed. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2023.

ETIKAN, Ilker; MUSA, Salihu A.; ALKASSIM, Rasheed S. Comparison of convenience sampling and purposive sampling. American Journal of Theoretical and Applied Statistics, New York, v. 5, n. 1, p. 1-4, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.11648/j.ajtas.20200501.11. Acesso em: 12 nov. 2025.

FLICK, Uwe. Introducing research methodology: a beginner's guide to doing a research project. 3rd ed. London: SAGE Publications, 2020.

GARCÍA-GARCÍA, Javier; DOLORES-FLORES, Crisólogo. Exploring students' understanding of Taylor series in higher mathematics education. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, London, v. 51, n. 8, p. 1195-1212, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1670369. Acesso em: 18 fev. 2026.

HIEBERT, James; GROUWS, Douglas A. The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In: GROUWS, Douglas A. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte: Information Age Publishing, 2020. p. 371-404.

JOHNSON, R. Burke; CHRISTENSEN, Larry. Educational research: quantitative, qualitative, and mixed approaches. 7th ed. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2020.

LOIBL, Katharina; ROLL, Ido; RUMMEL, Nikol. Towards a theory of when and how problem solving followed by instruction supports learning. Educational Psychology Review, New York, v. 32, n. 3, p. 639-662, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10648-019-09492-x. Acesso em: 05 mar. 2025.

MAKONYE, Judah P.; FAKUDE, Xolani S. Teachers' pedagogical practices in mathematics classrooms in Africa. African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, Durban, v. 25, n. 2, p. 145-156, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1080/18117295.2021.1927615. Acesso em: 11 set. 2025.

RADMEHR, Fredrick; DRAKE, Michael. Conceptual understanding in calculus learning: a systematic review. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, London, v. 17, n. 6, p. em1974, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.29333/ejmste/10843. Acesso em: 22 nov. 2025.

SFARD, Anna. Rethinking thinking: discourse, learning, and cognition in mathematics education. Cambridge: Cambridge University Press, 2021.

STEWART, James. Calculus: early transcendentals. 9th ed. Boston: Cengage Learning, 2020.

TALL, David. Cognitive development in mathematical thinking: the growth of mathematical concepts through lifespan. London: Routledge, 2019.

---

[1] Mestrandos em Ensino da Matemática no Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla (ISCED– Huíla) Lubango, Angola

[2] Mestrandos em Ensino da Matemática no Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla (ISCED– Huíla) Lubango, Angola

[3] Mestrandos em Ensino da Matemática no Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla (ISCED– Huíla) Lubango, Angola