REVISTA TÓPICOS
ISSN 2965-6672 | Qualis A2

LIMITE VIA ÉPSILON E DELTA ($\varepsilon-\delta$): DA INTUIÇÃO À FORMALIZAÇÃO EM AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM GEOGEBRA E SÉRIES INFINITAS

LIMIT VIA EPSILON AND DELTA ($\varepsilon-\delta$): FROM INTUITION TO FORMALIZATION IN DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS CLASSES WITH GEOGEBRA AND INFINITE SERIES

Ciências Exatas e da Terra • 09/11/2026

REGISTRO DOI: 10.70773/revistatopicos/793950694

Ricardo Fernando de Souza[1]

Juliano Schimiguel[2]

RESUMO

O artigo, vinculado ao estágio de pós-doutoramento em Ensino de Ciências e Matemática, tem por objetivo analisar a construção progressiva do conceito de limite a partir de uma experiência docente desenvolvida ao longo de um semestre letivo, no contexto regular das aulas de Cálculo Diferencial e Integral com licenciandos em Matemática e estudantes de Engenharia de Software de uma universidade privada do estado de São Paulo. As atividades envolveram noções de infinito e infinitésimo, séries geométricas, aproximações numéricas, limites de sequências e de funções e, posteriormente, formalizações via épsilon e delta, com apoio do GeoGebra. O estudo assume abordagem qualitativa, de caráter interpretativo, fundamentada principalmente em Ball, Thames e Phelps, Fischbein, Tall e Vinner. Os registros analisados evidenciam que as compreensões iniciais foram marcadas por ideias intuitivas de aproximação e por dificuldades algébricas e conceituais. Ao longo das aulas, observam-se indícios de ampliação do repertório matemático, com progressiva articulação entre intuição, procedimentos algorítmicos, representações e justificativas formais, indicando que a passagem ao formal ocorre de maneira gradual e não linear.

Palavras-chave: Noções intuitivas; Definição formal de limites; Cálculo Diferencial e Integral; Ensino de Cálculo; Formação de professores.

ABSTRACT

This article, linked to a postdoctoral study in Science and Mathematics Education, aims to analyze the progressive construction of the concept of limit based on a teaching experience developed throughout an academic semester in regular Differential and Integral Calculus classes with undergraduate Mathematics

Education students and Software Engineering students at a private university in the state of São Paulo, Brazil. The activities involved notions of infinity and infinitesimals, geometric series, numerical approximations, limits of sequences and functions and, subsequently, formalizations through epsilon and delta, with the support of GeoGebra. The study adopts a qualitative, interpretative approach, mainly grounded in the theoretical perspectives of Ball, Thames and Phelps, Fischbein, and Tall and Vinner. The analyzed records indicate that initial understandings were marked by intuitive ideas of approximation and by algebraic and conceptual difficulties. Throughout the classes, there were indications of an expanded mathematical repertoire, with a progressive articulation between intuition, algorithmic procedures, representations, and formal justifications, suggesting that the transition to formal understanding occurs gradually and nonlinearly.
Keywords: Intuitive notions; Formal definition of limits; Differential and Integral Calculus; Calculus teaching; Teacher education.

1. INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral envolve conceitos cuja compreensão não se reduz à aplicação de procedimentos algébricos. Particularmente no estudo de limites, ideias relacionadas à aproximação, infinito, infinitésimo, convergência e comportamento de funções exigem que o estudante articule diferentes formas de representação e atribua significado aos procedimentos matemáticos utilizados.

No ensino de limites, uma abordagem estritamente formal, apresentada de maneira desvinculada das compreensões inicialmente mobilizadas pelos estudantes, pode dificultar a

atribuição de significado ao conceito. Thomas (2009) considera a abordagem informal uma etapa importante para a construção inicial dessas ideias, uma vez que expressões como “aproximar-se de”, “tender a” ou “tão próximo quanto se queira” possibilitam explorar inicialmente o comportamento de uma função antes de sua sistematização formal.

Fischbein (1994) considera a atividade matemática constituída pela interação entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal. Tall e Vinner (1981), por sua vez, discutem a imagem conceitual como a estrutura cognitiva associada a um conceito, incluindo impressões, representações, propriedades e processos que podem não coincidir, inicialmente, com sua definição formal. Essas perspectivas são especialmente pertinentes ao estudo de limites, no qual expressões como “chegar perto”, “diminuir cada vez mais” ou “ir para zero” podem constituir pontos de partida para construções conceituais posteriores.

Também nessa direção, Ávila (1996) destaca que ideias relacionadas a processos infinitos podem ser inicialmente abordadas de maneira natural, sem que a formalização matemática seja tomada necessariamente como ponto de partida. Situações envolvendo séries geométricas, aproximações sucessivas e somas infinitas possibilitam explorar conceitos que posteriormente se relacionam ao estudo de limites.

Foi nesse contexto que, em articulação com as questões teóricas desenvolvidas no estágio de pós-doutoramento do primeiro autor, diferentes atividades foram incorporadas ao desenvolvimento regular das aulas de Cálculo. O trabalho envolveu licenciandos em Matemática e estudantes de Engenharia de Software de uma

universidade privada do estado de São Paulo, durante o primeiro contato desses estudantes com o estudo sistematizado do conceito de limite.

Inicialmente, foram propostas situações envolvendo significados atribuídos ao infinito e ao infinitésimo, processos infinitos, séries geométricas e aproximações sucessivas. Posteriormente, foram explorados o comportamento de funções nas proximidades de determinado valor e as aproximações laterais, buscando favorecer a diferenciação entre o valor assumido por uma função em determinado ponto e o comportamento dessa função quando a variável independente se aproxima desse ponto.

Diante desse cenário, este artigo tem por objetivo analisar, a partir de uma experiência docente desenvolvida ao longo de um semestre letivo, no contexto regular das aulas de Cálculo Diferencial e Integral e em articulação com questões formativas do pós-doutoramento, a construção progressiva do conceito de limite, considerando o movimento entre compreensões intuitivas e formais de representação, argumentação e justificação matemática.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1. O Ensino de Limites: Da Informalidade à Formalização

No processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, compreender o conceito de limite constitui uma questão central, especialmente porque a passagem de uma compreensão intuitiva para uma formulação matemática rigorosa não ocorre de maneira imediata. Essa passagem é assumida como um percurso didático em que a linguagem informal, as representações algébricas e a formalização devem ser articuladas progressivamente.

No cálculo de limites, interessa compreender o comportamento de uma função $f(x)$ quando x se encontra nas vizinhanças de um ponto c. Consideremos, por exemplo, a função $f(x)=\frac{2}{x}$. A substituição direta em $x=c=0$ não é possível, mas isso não impede analisar o comportamento da função para valores de x próximos de zero. Essa ideia de vizinhança constitui um ponto de partida para compreender, posteriormente, a relação entre x e $f(x)$ na definição formal de limite.

Na abordagem inicial, o comportamento de uma função é frequentemente verbalizado por expressões como “se aproxima de”, “tende a” ou “tão próximo quanto se queira”. Algebricamente, essas verbalizações podem ser representadas por $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. Thomas (2009, p. 70) caracteriza essa apresentação como uma definição informal, necessária para anteceder a formalização e favorecer uma construção inicial do conceito:

> *Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L (tão próximo de L quanto quisermos), para todos os valores de x suficientemente próximo de x_0, dizemos que f tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. (Thomas, 2009, p. 70).*

Thomas (2009, p. 70) acrescenta:

> *"[...] Essencialmente, a definição diz que os valores de $f(x)$ ficarão próximos ao número L sempre que x estiver próximo de x_0 (em qualquer lado de x_0). Essa definição é informal porque as expressões arbitrariamente próximo e suficientemente próximo são imprecisas; seu significado depende do contexto. Para um metalúrgico que fabrica um pistão, próximo pode significar alguns centésimos de milímetro. Para um astrónomo que estuda galáxias distantes, próximo pode significar alguns milhares de anos-luz. Entretanto, a definição é suficientemente clara para permitir o reconhecimento e o cálculo dos limites de funções específicas. (Thomas, 2009, p. 70).*

A partir dessa abordagem intuitiva, que descreve o comportamento de uma função à medida que pequenas variações em x produzem variações em $f(x)$, pode-se avançar para a definição formal. Esse movimento é importante porque a linguagem informal permite construir significados iniciais, mas não é suficiente para estabelecer rigorosamente as condições sob as quais um limite existe.

Do ponto de vista formal, escreve-se

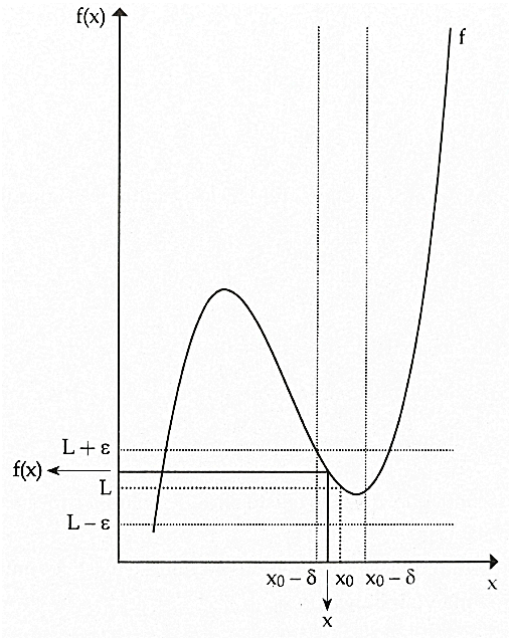
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, isto é, para anunciar que o limite de $f(x)$ iguala-se ao número real L quando $x \to c$, é necessário demonstrar que a distância entre $f(x)$ e L pode ser infinitesimalmente pequena tanto quanto se queira se x for condicionado suficientemente próximo de c, e escrevemos $\lim_{x \to c} f(x) = L$, dado que $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$ e dessa

maneira, define-se a função f num intervalo aberto[3], no qual há um ponto de acumulação c para todos os valores de x. (Faccin, 2015, p. 42).

Se para todo $\varepsilon > 0$, há um intervalo aberto em torno do número L, como por exemplo, $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, o limite é demonstrado quando encontra-se um valor $\delta > 0$ no aberto $(c - \delta, c + \delta)$, tal que todo ponto x pertencente ao intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, tem imagem $f(x)$ pertencente ao intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, como mostrado na figura 1 a seguir:

Figura 1. Interpretação geométrica do conceito formal de limite



Fonte: Panonceli (2017, p. 91)

Nesse estudo, essa passagem é discutida também a partir de Tall e Vinner (1981), pois as imagens conceituais construídas pelos estudantes podem não se conectar imediatamente à definição formal, especialmente quando entram em cena os quantificadores ε e δ.

2.2. Noções de Infinito, Infinitésimos e Dificuldades Algébricas

O estudo de limites envolve dificuldades que não se restringem à aprendizagem de procedimentos algébricos. Burigato (2019) mostra que erros de fatoração e simplificação podem interferir diretamente no cálculo de limites. Entre esses equívocos, destacam-se transformações algébricas inválidas, como

> $= (x + c)^2 \rightarrow x^2 + 2c,$
>
> $= (x + c)^2 \rightarrow x^2 + c^2,$
>
> $= a(x - b) \rightarrow ax - b,$
>
> $= \frac{a}{x} < \frac{c}{d} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{a} < \frac{d}{c},$
>
> $= x^2 + x + 2 \rightarrow x^2 + 2x \rightarrow 3x^2.$
>
> *(Burigato, 2019, p. 37).*

Esses equívocos são relevantes porque a manipulação algébrica aparece constantemente no estudo de limites de funções racionais. Considere o exemplo, a partir de Thomas (2009):

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Para analisar o comportamento da função quando $x \rightarrow 1$, fatoram-se numerador e denominador:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \qquad x \neq 1.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Esse procedimento permite discutir por que a simples substituição direta não resolve todos os limites e por que a fatoração não deve ser tratada apenas como técnica mecânica. O uso prematuro da regra de L'Hôpital pode encobrir justamente essa relação entre o procedimento algébrico e o significado do limite, além de exigir um conhecimento de derivadas que pode ainda não estar consolidado, conforme se constata em Burigato (2019):

Por exemplo, ao tentar resolver um limite, o estudante utiliza propriedades que não são válidas, como no caso em que é preciso encontrar o $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1}$, "O aluno "cancela" o x^2 do numerador com o x do denominador, obtendo a expressão $-(x-3)$ e substituindo, então, o valor de x . (p. 36).

Rezende (2003) chama atenção para o fato de que dificuldades em polinômios, fatoração, relações trigonométricas e cálculos algébricos aparecem também em outras disciplinas do ensino superior. Para o autor, o campo semântico das noções básicas do Cálculo está fortemente relacionado às ideias de "infinito", "infinitésimos" e "variáveis". Por isso, nesse estudo, essas noções são consideradas estruturantes para compreender o limite, e não meros conteúdos acessórios.

Nesse sentido, o infinito e o infinitésimo constituem ideias importantes para a construção inicial do conceito. O infinitésimo pode ser associado intuitivamente a quantidades que se tornam arbitrariamente pequenas, enquanto o infinito exige compreender processos que continuam indefinidamente sem que isso signifique, necessariamente, ausência de um valor-limite.

2.3. Séries Geométricas Infinitas Como Aproximação Ao Conceito de Limite

As séries geométricas infinitas são utilizadas como um caminho para aproximar a ideia de processo infinito da noção de convergência. Ávila (1996) argumenta que a ideia de somar infinitamente pode surgir de maneira natural antes da preocupação com sua estrutura formal. Um exemplo familiar é a dízima periódica $0,888\cdots$.

Primeiramente,

$$0,888\cdots = 8 \cdot 0,111\cdots$$

que pode ser reescrita como

$$8 \cdot 0,111\cdots = 8\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right) \cdot$$

Explicitando a estrutura de progressão geométrica,

$$8\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) \cdot$$

Como a razão satisfaz $|q| < 1$, a soma de uma progressão geométrica infinita é dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \cdot$$

Com $a_1 = \frac{1}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$,

$$8\left(\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}\right) = 8\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9}\right) = \frac{8}{9} \cdot$$

O procedimento usual para transformar a dízima em fração também pode ser escrito como

$$x = 0{,}888\cdots \Rightarrow 10x = 8{,}888\cdots \Rightarrow 9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9},$$

evidenciando, ainda que implicitamente, uma soma infinita.

O estudo das séries oferece a oportunidade de discutir o comportamento dos termos e das somas parciais. Os termos podem tornar-se progressivamente menores e tender a zero, enquanto as somas parciais se aproximam de um valor finito. Essa distinção é central: o limite dos termos e o limite das somas parciais não são o mesmo objeto matemático.

2.4. Conhecimento Matemático para o Ensino

Ball, Thames e Phelps (2008), a partir de refinamentos das categorias de Shulman, discutem conhecimentos específicos necessários ao trabalho docente. Para a análise desenvolvida neste estudo, são considerados quatro domínios: conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento horizontal do conteúdo.

O conhecimento comum do conteúdo corresponde ao conhecimento matemático necessário para resolver problemas que também podem ser enfrentados por profissionais de outras áreas: calcular um limite, reconhecer uma progressão geométrica, determinar sua soma ou executar aproximações numéricas.

O conhecimento especializado do conteúdo, por sua vez, envolve compreender aspectos do conteúdo que se tornam relevantes especificamente no trabalho de ensinar. No caso das séries geométricas e dos limites, isso inclui distinguir termos de uma sequência de suas somas parciais, reconhecer diferentes formas de

representação, antecipar erros recorrentes e selecionar exemplos capazes de favorecer uma compreensão progressiva.

O conhecimento pedagógico do conteúdo refere-se à capacidade de transformar o conhecimento matemático em formas compreensíveis aos estudantes. Isso envolve escolher linguagens, exemplos, representações, recursos e estratégias adequados ao nível de compreensão da turma, além de interpretar as respostas produzidas e reorganizar a mediação quando surgem dificuldades.

O conhecimento horizontal do conteúdo permite reconhecer relações entre diferentes tópicos matemáticos ao longo do currículo. Neste estudo, essa categoria é mobilizada para interpretar a articulação entre sequências numéricas, séries geométricas infinitas, dízimas periódicas, comportamento de funções e noções de limite. Essa articulação é particularmente importante para a formação do futuro professor, pois possibilita compreender os conceitos matemáticos de forma integrada e estabelecer conexões entre conteúdos trabalhados em diferentes momentos da formação. Essa perspectiva converge com Souza et al. (2024), ao destacarem o papel formativo do Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura, e com Souza e Pietropaolo (2026), ao situarem sequências, séries e limite entre conhecimentos que devem integrar o repertório do futuro professor de Matemática.

2.5. Os Componentes Intuitivo, Algorítmico e Formal

Fischbein (1994) propõe três componentes fundamentais da atividade matemática: intuitivo, algorítmico e formal. O componente intuitivo refere-se a compreensões aceitas de maneira direta, sem que inicialmente sejam exigidas justificativas formais. O

componente algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução, enquanto o componente formal envolve definições, axiomas, teoremas, provas e justificativas matemáticas.

Segundo Fischbein (1994), esses componentes precisam ser articulados. A intuição pode fornecer um ponto de partida, mas não é suficiente para sustentar o rigor matemático; da mesma forma, o domínio de procedimentos, sem compreensão das razões pelas quais funcionam, pode resultar em uma aprendizagem excessivamente mecânica.

No estudo de séries geométricas infinitas, por exemplo, a percepção de que os termos "vão ficando menores" constitui uma compreensão intuitiva. Calcular a razão, aplicar a fórmula da soma e manipular expressões constitui uma dimensão algorítmica. Justificar por que uma sequência ou série converge e formular essa convergência em termos de ε e N corresponde ao componente formal.

Fischbein (1994, p. 231, tradução nossa) ressalta que a Matemática deve ser considerada simultaneamente como corpo de conhecimento formal, dedutivo e rigoroso e como atividade humana em que se articulam relações entre o intuitivo e o lógico, o concreto e o abstrato, o informal e o formal. Essa perspectiva é particularmente relevante para a formação de professores, pois não basta dominar procedimentos; é necessário compreender significados e ser capaz de torná-los ensináveis.

2.6. Imagem Conceitual, Convergência e Passagem Ao Formal

Tall e Vinner (1981) definem imagem conceitual como a estrutura cognitiva total associada a determinado conceito matemático,

abrangendo impressões, imagens mentais, representações visuais, propriedades e processos. Essa imagem pode conter elementos coerentes com a definição formal e, simultaneamente, concepções conflitantes.

Tall e Vinner analisaram a imagem conceitual de estudantes diante da convergência de uma série infinita. Um dos exemplos envolve somas parciais representadas por

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n}) .$$

Os autores observaram estudantes que compreendiam S_n como uma quantidade que se aproxima de S, mas que "nunca chega" a S. Essa interpretação revela um conflito importante: a ideia dinâmica de aproximação pode sugerir um processo interminável, enquanto a formalização matemática admite a igualdade entre o limite da sequência de somas parciais e o valor da soma da série.

Em situação análoga, considera a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

cujas somas parciais podem ser escritas como

$$S_n = \frac{\frac{2}{3}[1 - (\frac{1}{3})^{n}]}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} .$$

Como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0,$$

segue que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1.$$

A passagem para a definição formal de convergência exige, então, mostrar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$|S_n - S| < \varepsilon.$$

No exemplo anterior,

$$|S_n - 1| = |1 - \frac{1}{3^n} - 1| = \frac{1}{3^n}.$$

Como $n > N$, então $3^n > 3^N$ e portanto, $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^N}$. Precisamos escolher um $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{3^N} \leq \varepsilon$ então, tem-se:

$$|S_n - 1| = |S_n - S| = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^N} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon, \text{ com } 3^N \geq \frac{1}{\varepsilon},$$

confirmando formalmente que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1.$$

Essa formalização evidencia uma dificuldade destacada por Fischbein (1994): na compreensão intuitiva, o estudante acompanha o processo em que n aumenta e os valores se aproximam do limite; na definição formal, a ordem do raciocínio é invertida, pois parte-se de um $\varepsilon > 0$ arbitrário para determinar um N que garanta a proximidade desejada. Como afirma Fischbein (1994, p. 238, tradução nossa):

> *"Não começamos descrevendo o processo de aproximação de a por uma sequência de números a_n. Começamos mencionando, estranhamente, um número positivo ε, 'não importa quão pequeno', e depois introduzimos N e $n \geq N$. [...] Na definição formal, tornamos N dependente de ε. Invertemos a ordem natural do processo de pensamento."*

Essa inversão ajuda a compreender por que a passagem direta da representação intuitiva para a definição rigorosa pode ser contraintuitiva. Villani et al. (2012) observam dificuldade semelhante: enquanto a função parece "ir" de x para $f(x)$, na definição formal a escolha das vizinhanças ocorre no sentido oposto, partindo de ε para determinar δ. Por isso, a compreensão do limite exige uma construção gradual, em que intuição, procedimentos e formalização sejam articulados sem que um componente substitua os demais.

3. METODOLOGIA

O artigo apresenta um relato analítico de uma experiência docente vinculada às questões teóricas de um estudo de pós-doutoramento em Ensino de Ciências e Matemática, vinculado ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu da Universidade Cruzeiro do Sul.

As atividades integraram o planejamento e o desenvolvimento ordinário dos conteúdos das disciplinas, sem constituírem uma atividade externa às aulas, e foram propostas progressivamente conforme eram trabalhadas noções de infinito, infinitésimo, sequências, séries, aproximação e limite de funções. Em momentos específicos dessa progressão, utilizou-se também o GeoGebra como recurso de apoio à visualização das relações entre as vizinhanças

determinadas por ε e δ, articulando a representação gráfica às expressões algébricas e à definição formal de limite.

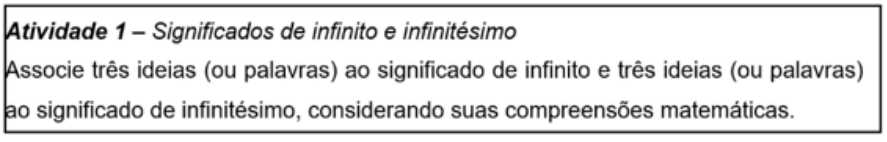
A abordagem adotada é qualitativa, de caráter interpretativo. Segundo Minayo (2012), a análise qualitativa envolve movimentos de compreensão e interpretação do material empírico, buscando ultrapassar sua dimensão meramente descritiva e articulá-lo aos referenciais teóricos que orientam o estudo. Nessa perspectiva, as produções são discutidas à luz de Ball, Thames e Phelps (2008), Shulman (1986), Fischbein (1994), Tall e Vinner (1981) e de estudos específicos sobre a compreensão do conceito de limite.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. Primeiras Aproximações Ao Conceito de Limite

As atividades iniciais abordaram infinito, infinitésimo e aproximação. A Atividade 1 explorou significados associados a infinito e infinitésimo, enquanto a Atividade 2 utilizou o paradoxo de Zenão para discutir a convergência de uma soma infinita. As propostas constam na Figura 2.

Figura 2. Processos infinitos e infinitésimo


Atividade 1 *– Significados de infinito e infinitésimo*
Associe três ideias (ou palavras) ao significado de infinito e três ideias (ou palavras) ao significado de infinitésimo, considerando suas compreensões matemáticas.

Fonte: Acevo do autor

Atividade 2 – Adaptado de Kirnev, D. C. B. Um dos paradoxos mais conhecidos da Antiguidade foi proposto pelo filósofo Zenão de Eleia. Para se andar um quilômetro, deve-se andar primeiramente meio quilômetro. Porém, antes de andar esse meio quilômetro deve-se andar um quarto de quilômetro. Mas antes andar esse um quarto de quilômetro, deve-se primeiro andar um oitavo de quilômetro e assim sucessivamente. Zenão afirmou que esse movimento era impossível, pois sequer se iniciaria a caminhada.

Responda às questões a seguir.

a) Represente matematicamente as distâncias percorridas por meio de uma soma.

b) Na prática, uma pessoa conseguiria percorrer essa distância? Explique.

c) O que acontece com os valores das parcelas da soma à medida que o processo continua indefinidamente?

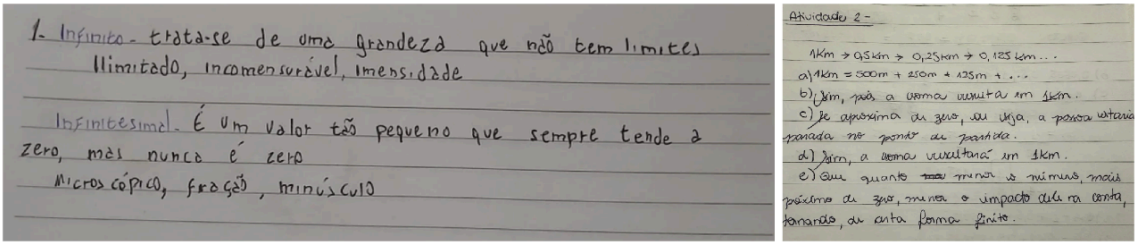
e) Em sua opinião, essa soma aproxima-se de algum valor? Em caso afirmativo, qual? Justifique sua resposta.

f) O que essa situação permite concluir sobre a ideia de infinito?

Fonte: Análise Matemática. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016

Essa escolha dialoga com Ávila (1996), ao defender que a ideia de somar infinitamente pode ser introduzida de maneira natural antes de uma estruturação formal. Também se relaciona ao conhecimento horizontal do conteúdo de Ball, Thames e Phelps (2008): essa categoria é exemplificada pela articulação entre sequências, séries geométricas infinitas e significados de limite. Assim, as tarefas funcionaram como ponte entre conhecimentos já familiares e a construção inicial do conceito. Os registros selecionados na Figura 3 mostram essa etapa de elaboração.

Figura 3. Registros de compreensões iniciais sobre infinito e aproximações sucessivas



Fonte: Acervo do autor

Em um dos registros, o infinito é associado a uma grandeza que “não tem limites”, enquanto o infinitésimo é descrito como “um valor

tão pequeno que sempre tende a zero, mas nunca é zero". Esperava-se, nesse momento, que o infinito fosse compreendido como associado a um processo que pode prosseguir indefinidamente, e o infinitésimo, no contexto trabalhado, a quantidades que podem tornar-se arbitrariamente pequenas em um processo de aproximação a zero. A primeira resposta apresenta uma aproximação intuitiva à ideia de ilimitado; a segunda, porém, revela uma imprecisão conceitual, pois atribui a um valor fixo a ação de "tender a zero". O registro evidencia, assim, uma imagem conceitual ainda em construção, na perspectiva de Tall e Vinner (1981), na qual ideias intuitivamente produtivas coexistem com compreensões que ainda necessitam de refinamento matemático.

No registro referente ao paradoxo de Zenão, o estudante representa adequadamente as distâncias por uma soma de parcelas sucessivamente menores e reconhece que o percurso total corresponde a 1 km. Esperava-se, nesse caso, que fosse estabelecida a distinção entre o comportamento das parcelas e o comportamento da soma: enquanto os termos da sequência tendem a zero, a soma parcial se aproxima de um valor finito, igual a 1 km. Entretanto, ao afirmar que as parcelas "se aproximam de zero" e concluir que a pessoa permaneceria no ponto de partida, o estudante revela um conflito conceitual entre o limite dos termos e o limite da soma. O registro evidencia, assim, a coexistência entre uma compreensão correta da convergência da soma e uma interpretação inadequada do significado da diminuição das parcelas.

À luz de Fischbein (1994), predominam nessa etapa componentes intuitivos, acompanhados de elementos algorítmicos, como a representação da soma. A resposta esperada envolveria não apenas reconhecer que a soma resulta em 1 km, mas justificar que a

diminuição progressiva das parcelas não impede a convergência do processo para esse valor. A ausência dessa articulação mostra que a conclusão correta ainda não está sustentada por uma compreensão plenamente sistematizada do processo de convergência, reforçando a necessidade de avançar da percepção intuitiva para formas mais formais de justificação do conceito de limite.

4.2. Da Aproximação Numérica à Interpretação do Comportamento da Função

Em um momento seguinte, as atividades passaram a relacionar a linguagem de aproximação ao comportamento de uma função.

Figura 4. Limite de uma função por aproximações laterais

Atividade 4 – Adaptado de Ferreira (2021). Considerando f uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$, complete o quadro 1, a seguir.

Quadro 1: Estimativa do limite da função $f(x)$ por valores de x próximos de 0

Relação entre f(x) = x² + 1 e x, quando x se aproxima de 0 pela esquerda		Relação entre f(x) = x² + 1 e x, quando x se aproxima de 0 pela direita	
x	***f(x)***	***x***	***f(x)***
-1,000	2,000	1,000	
-0,400		0,400	
-0,200	1,040	0,200	
-0,100		0,100	
-0,001			

a) Observando a tabela que indica alguns valores de $f(x)$ para alguns valores de x, responda: para qual valor $f(x)$ se aproxima, quando os valores de x se tornam cada vez mais próximos de zero?

b) A função está definida em $x = 1$? Em caso afirmativo, qual é a imagem de f quando $x = 1$?

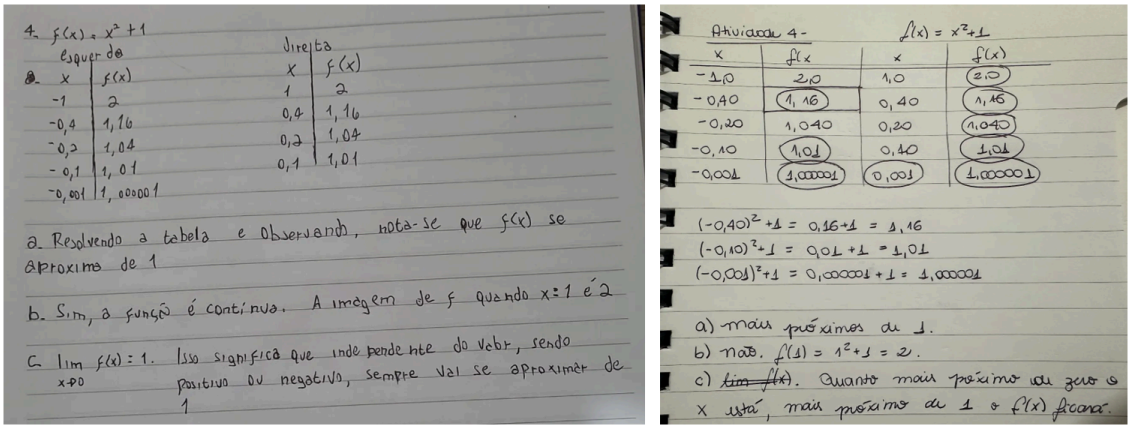
c) De acordo com a tabela, qual o valor do $\lim_{x \to 0} f(x)$? Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esse resultado.

Fonte: Ferreira (2021, p. 113 e 114)

A situação apresentada na Figura 4 propôs o preenchimento de uma tabela para a função, tomando valores de x próximos de zero pela esquerda e pela direita, e solicitou a interpretação do valor para o qual as imagens se aproximavam.

A opção por iniciar pela tabela antes de uma definição formal retoma Thomas (2009): expressões como “aproximar-se de” e “tender a” constituem uma apresentação informal do limite que pode favorecer a construção inicial de significado. Sob a perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008), calcular as imagens mobiliza conhecimento comum do conteúdo; selecionar valores adequados, interpretar as respostas e conduzir a distinção entre valor da função e valor-limite mobiliza conhecimentos próprios do trabalho docente. Nos registros da Figura 5, passa a aparecer com maior nitidez a relação entre a aproximação dos valores de x e o comportamento correspondente de $f(x)$.

Figura 5. Registros produzidos na exploração de valores da função próximos de zero



Fonte: Acervo do autor

Em uma produção, lê-se que $f(x)$ “se aproxima de 1”; em outra, registra-se que, quanto mais próximo de zero estiver x, mais próximo de 1 ficará $f(x)$. Observa-se, ainda, uma diferença importante entre os dois registros quanto à forma de representação do conceito. No primeiro, além da descrição escrita do comportamento de $f(x)$, o estudante utiliza a notação $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, indicando uma primeira articulação entre a compreensão intuitiva do processo de aproximação e sua

representação simbólica. No segundo registro, embora também seja reconhecida a relação entre a aproximação de x a zero e a aproximação de $f(x)$ a 1, essa compreensão permanece predominantemente expressa por escrito; observa-se uma tentativa de mobilização da notação de limite, posteriormente interrompida, sem que a representação simbólica seja concluída.

Essa diferença sugere níveis distintos de articulação entre imagem conceitual e representação matemática. À luz de Tall e Vinner (1981), ambos os registros revelam elementos da imagem conceitual em construção, embora apenas um deles já incorpore explicitamente a simbologia associada ao conceito. Em termos de Fischbein (1994), pode-se considerar que, no primeiro caso, o componente intuitivo começa a se articular a uma forma mais sistematizada de representação, enquanto, no segundo, predomina ainda a descrição intuitiva do comportamento da função.

Essa coexistência reforça Fischbein (1994): o componente intuitivo passa a dialogar com o algorítmico, pois os valores são calculados e organizados em tabela, mas a formalização ainda não se encontra estabilizada. O que se observa é uma ampliação do repertório utilizado para interpretar a aproximação, e não uma passagem linear ou concluída ao conceito formal.

4.3. Limite e Valor da Função: Conflitos e Ampliação Conceitual

A distinção entre o comportamento de uma função nas vizinhanças de um ponto e seu valor exatamente nesse ponto tornou-se mais evidente na atividade apresentada na Figura 6. Foi considerada uma função racional cujo domínio exclui $x=3$, e os estudantes estimaram o limite por valores laterais.

Figura 6. Situação proposta para estimar o limite de uma função racional em $x=3$

Atividade 5 - Seja $m: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $m(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, preencha a quadro 2 para os valores dados de $x < 3$ e $x > 3$ e estime qual o valor do limite da função.

Quadro 2: Estimativa do limite da função $m(x)$ por aproximação lateral em $x = 3$

x<3	m(x)	x>3	m(x)
2,900		3,100	
2,980		3,020	

a) Observando os valores obtidos, qual é a sua estimativa para o valor do limite da função quando os valores de x se aproximam de 3?

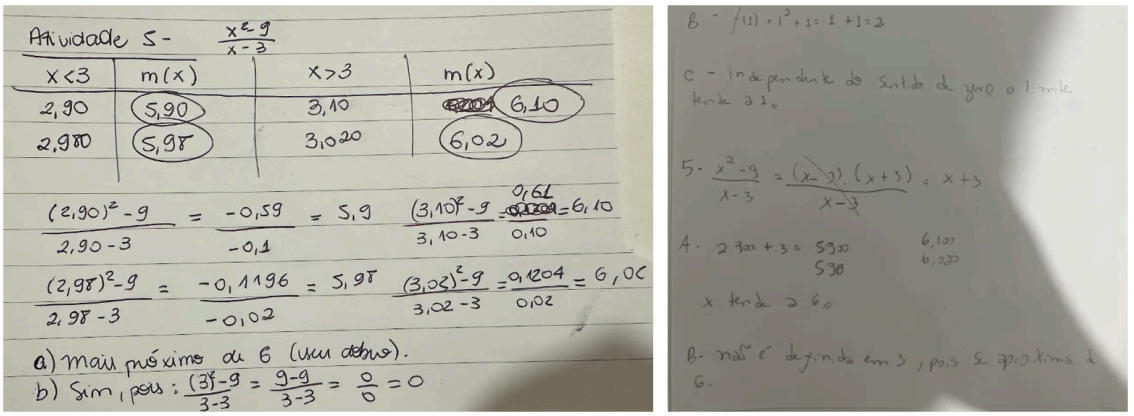
b) A função m está definida em $x = 3$? Em caso afirmativo, qual é o valor da imagem de m quando $x = 3$?

Fonte: Ferreira (2021, p. 117 e 118)

A manipulação algébrica é necessária para o trabalho com limites de funções racionais, mas não pode ser separada de seu significado. Burigato (2019) mostra como dificuldades de fatoração e simplificação podem produzir erros no cálculo de limites. Em termos de Ball, Thames e Phelps (2008), saber fatorar e calcular o limite integra o conhecimento comum do conteúdo; reconhecer o significado de um erro e decidir como explorá-lo pedagogicamente aproxima-se do conhecimento especializado do conteúdo.

Os registros da Figura 7 evidenciam níveis distintos de elaboração do conceito de limite e, particularmente, da relação entre o limite de uma função e sua definição no ponto considerado.

Figura 7. Registros contrastantes sobre limite e valor da função em $x=3$



Fonte: Acervo do autor

Em ambos os casos, os valores obtidos lateralmente conduzem à aproximação de 6. Entretanto, no registro à esquerda, embora o estudante reconheça numericamente essa aproximação, afirma, no item b, que a função estaria definida em $x=3$, interpretando a forma indeterminada 0/0 como se seu resultado fosse zero. Além disso, não é realizada a fatoração da expressão algébrica, procedimento que permitiria evidenciar que, para $m(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3,\ x \neq 3.$

Nesse caso, a resposta revela que o reconhecimento intuitivo do valor para o qual a função se aproxima não foi suficiente para distinguir o comportamento da função nas vizinhanças de $x=3$ de sua definição exatamente nesse ponto.

Esse resultado dialoga diretamente com Burigato (2019), ao destacar que dificuldades na manipulação e simplificação de expressões algébricas podem interferir na compreensão do conceito de limite. A ausência da fatoração no primeiro registro não representa apenas uma dificuldade procedimental: ela impede que se torne explícita a relação entre a expressão original, não definida em $x=3$, e a expressão $(x+3)$, que assume os mesmos valores da expressão original para todo x diferente de 3. Desse modo, a dificuldade algébrica repercute na própria interpretação conceitual do limite.

No registro à direita, por outro lado, observa-se a decomposição correta de x^2-9 em $(x$-3$)(x+3)$ e o cancelamento do fator comum, simplificando-se a expressão e obtendo-se $(x+3)$ para valores de x diferentes de 3. Esse procedimento é semelhante ao discutido por Thomas (2009) ao abordar limites de funções racionais a partir da análise do comportamento da função nas proximidades do ponto. A reescrita da expressão permite compreender que, embora a função original não esteja definida em $x=3$, para valores próximos de 3 ela apresenta o mesmo comportamento da função $(x+3)$, cujos valores se aproximam de 6. Ainda que a justificativa apresentada no registro possa ser aprimorada, a utilização da fatoração representa um avanço importante, pois fornece suporte algébrico para distinguir o valor do limite da existência da função no ponto considerado.

A diferença entre esses registros é teoricamente relevante. O componente algorítmico, nos termos de Fischbein (1994), aparece na fatoração e nos cálculos de aproximação; o componente intuitivo manifesta-se na percepção de que os valores se aproximam de 6; e o componente formal começa a ser exigido quando se torna necessário distinguir a existência do limite da definição da função no ponto.

A noção de imagem conceitual de Tall e Vinner (1981) também é particularmente útil nesse ponto. A resposta que identifica corretamente o valor de aproximação, mas trata a forma 0/0 como zero, mostra que uma representação produtiva pode coexistir com um conflito conceitual. Esse conflito sinaliza quais relações precisam ser reorganizadas para que a imagem conceitual se aproxime da definição matemática.

A leitura dos registros evidencia, ainda, a relevância das categorias de Ball, Thames e Phelps (2008) para a formação docente. Não basta chegar ao resultado numérico: compreender por que um procedimento funciona, interpretar erros, reconhecer diferentes estratégias e estabelecer relações entre séries, funções, aproximações e limite constituem demandas importantes do conhecimento matemático necessário para ensinar.

4.4. Da Aproximação Intuitiva à Demonstração Formal do Limite

A continuidade do trabalho em sala de aula passou, então, a deslocar o foco da identificação de tendências e aproximações para a necessidade de justificar matematicamente por que determinado número pode ser reconhecido como limite. Essa mudança não foi tratada como ruptura com o percurso anterior, mas como aprofundamento das ideias de aproximação já mobilizadas. Essa orientação é sustentada por Nagamine (2023, p. 15392), para quem "pode-se partir primeiramente do modelo, considerando-se vários exemplos, para em seguida apresentar a definição formal via épsilons e deltas".

Essa progressão também responde a uma preocupação recorrente na literatura sobre o ensino de limites. Orfali e Ponte (2015), Messias e Brandemberg (2015), Barto (2004), Jordaan (2005), Nair (2010), Cottrill et al. (1996), Burigato (2019) e Fonseca e Henriques (2018) discutem, sob diferentes perspectivas, dificuldades de estudantes para articular imagens intuitivas, continuidade, aproximação e definição formal. Tall (1991) também chama atenção para dificuldades relacionadas a abordagens excessivamente algorítmicas ou formalistas, distantes das experiências construídas pelos estudantes.

Nesse sentido, o avanço para o formal foi organizado de modo gradual, mantendo a relação entre significado, procedimento e justificação.

4.4.1. Limite de Sequências: Reconhecimento do Valor e Exigência de Demonstração

O primeiro movimento de formalização ocorreu no estudo do limite de uma sequência. Após um exemplo de aplicação em que se discutiu a convergência de uma sequência racional para um valor finito, foi introduzida a definição formal: um número a é limite da sequência a_n se, para todo número positivo ε, existir $n_0 \in N$ tal que, para todo $n > n_0$, vale a desigualdade $|a_n - a| < \varepsilon$ ou, em notação de limite, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

Figura 8. Situação de Aprendizagem 1: demonstração do limite de uma sequência

Situação de Aprendizagem 1: Demonstração de limite de uma sequência a_n

Utilizando a definição formal de limite, justificar:

Considere a sequência

$$a_n = \frac{2n + 15}{5n}, n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule a_n para $n = 10, 100, 1000$. O que se observa sobre o limite da sequência?

b) Demonstre o limite da sequência observada.

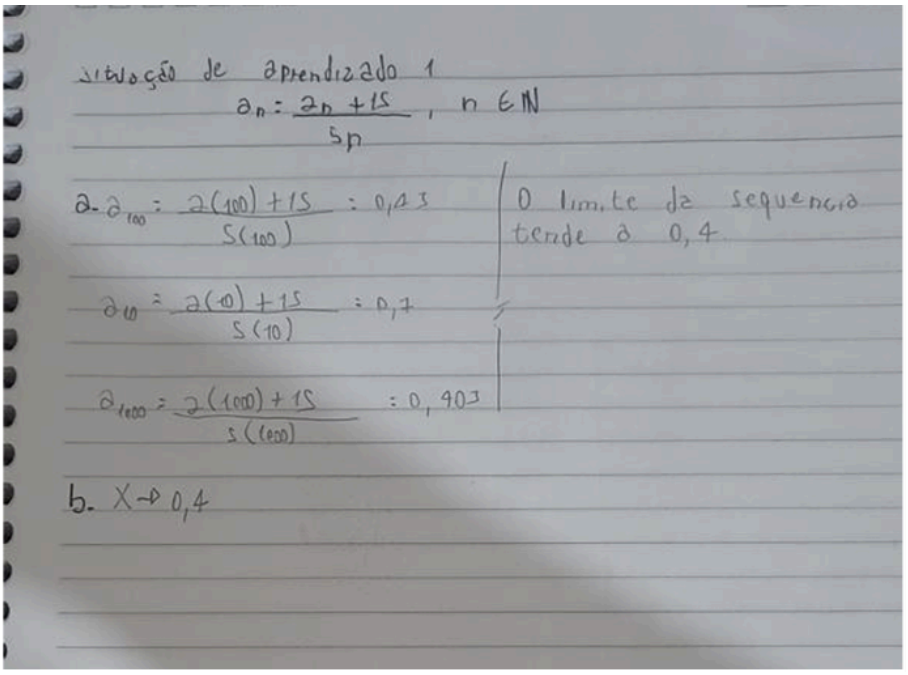
Fonte: Acervo do autor.

A inserção dessa definição tornou explícita uma exigência que não estava presente nas atividades iniciais: já não bastava observar numericamente para onde a sequência parecia tender. Era necessário demonstrar que, para qualquer tolerância ε escolhida, os termos permaneceriam dentro da distância prescrita a partir de determinado índice. Essa passagem se relaciona ao que Pietropaolo

(2005) discute acerca do papel da demonstração na formação matemática e ao que a BNCC aponta ao mencionar a necessidade de uma validação “cada vez mais formal” das conjecturas (Brasil, 2018, p. 540).

Na Situação de Aprendizagem 1, apresentada na Figura 8, foi proposta a sequência $a_n = \frac{2n+15}{5n}$, inicialmente com o cálculo de alguns termos e, em seguida, com a solicitação explícita de demonstração do limite observado. O registro da Figura 9 mostra uma etapa intermediária importante desse processo.

Figura 9. Registro inicial diante da exigência de demonstração formal



Fonte: Acervo do autor

O estudante calculou valores da sequência e reconheceu que os termos se aproximavam de 0,4. Entretanto, no item destinado à demonstração, registrou apenas a indicação do valor-limite, sem utilizar a definição formal apresentada. Trata-se, portanto, de uma resposta conceitualmente distinta de uma demonstração. A imagem conceitual já contém a ideia de tendência, mas a definição

conceitual ainda não é mobilizada como instrumento de prova, situação compatível com a distinção estabelecida por Tall e Vinner (1981) entre imagem conceitual e definição conceitual.

Esse registro também evidencia com clareza a articulação proposta por Fischbein (1994). O componente intuitivo permite reconhecer que os valores “tendem” a 0,4; o componente algorítmico aparece nos cálculos numéricos; porém, o componente formal ainda não se manifesta na justificativa. Como afirma Fischbein (1994, p. 232), a compreensão do que é rigor e coerência em Matemática “não é adquirida espontaneamente pelo estudante”. O resultado não é, portanto, interpretado como ausência de compreensão, mas como indicação de que a passagem para o formal ainda precisava ser construída.

4.4.2. Da Definição de Sequência à Definição Formal de Limite de Função

Na continuidade das aulas, a definição formal de limite de função foi retomada. A passagem de sequências para funções teve a finalidade de reforçar a estrutura lógica anteriormente introduzida: uma proximidade prescrita na imagem deve ser garantida por uma proximidade correspondente no domínio. Para uma função f, escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Thomas (2009), Faccin (2015) e Panonceli (2017), já mobilizados na fundamentação dessa investigação, sustentam a compreensão dessa relação por meio das vizinhanças. Villani et al. (2012) e Fischbein (1994) destacam a dificuldade adicional produzida pela

inversão do sentido do raciocínio: intuitivamente acompanha-se x em direção ao ponto e observa-se $f(x)$; formalmente, fixa-se primeiro ε e procura-se um δ que assegure a condição desejada.

Nesse momento do desenvolvimento da disciplina, o *software GeoGebra* foi utilizado como recurso tecnológico de apoio à representação da definição formal de limite. A exploração gráfica permitiu visualizar, simultaneamente, a vizinhança associada a δ em torno do ponto a, no domínio, e a vizinhança associada a ε em torno de L, na imagem, permitindo relacionar graficamente as duas condições da definição formal já apresentada.

A manipulação dessas vizinhanças possibilitou retomar visualmente a dependência entre a tolerância estabelecida para os valores da função e a proximidade correspondente no domínio. O recurso da tecnologia empregada teve por finalidade apoiar a passagem da representação intuitiva de aproximação para a compreensão das relações envolvidas na definição formal.

Essa utilização dialoga com o conhecimento pedagógico e especializado do conteúdo discutido por Ball, Thames e Phelps (2008), uma vez que a escolha da representação tecnológica procura tornar perceptíveis relações matemáticas que, em sua forma exclusivamente simbólica, podem se apresentar menos acessíveis em um primeiro contato.

Essa visualização assume particular relevância diante do caráter contraintuitivo apontado por Fischbein (1994), pois permite acompanhar graficamente a inversão própria da definição formal: estabelece-se inicialmente uma tolerância ε para a imagem e, a

partir dela, determina-se uma condição δ correspondente para o domínio.

Figura 10. Situação de Aprendizagem 2: demonstração de um limite de função

Situação de Aprendizagem 2: Demonstração de um limite

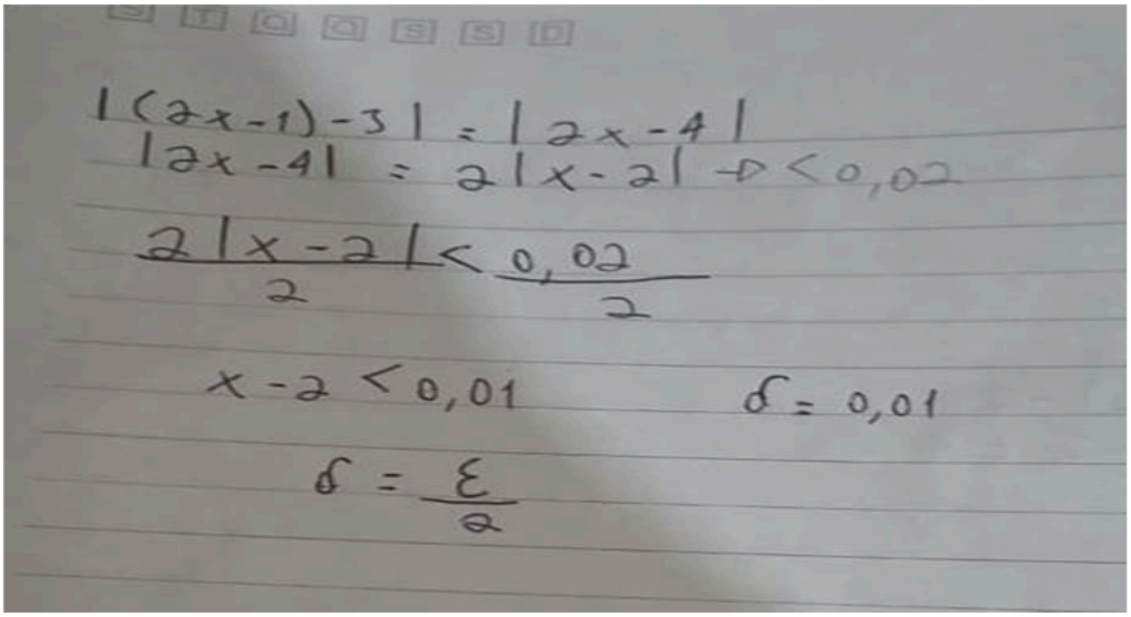
Utilizando a definição formal de limite, justificar:

$$\lim_{x \to 2}(2x + 1) = 5$$

Fonte: Acervo do autor

A Situação de Aprendizagem 2, apresentada na Figura 10, solicitou a demonstração de um limite de função linear pela definição formal. Antes dela, foi trabalhado um exemplo em que, dado $\varepsilon = 0{,}02$, buscava-se determinar $\delta > 0$. O registro correspondente aparece na Figura 11.

Figura 11. Registro de determinação de δ a partir de um valor de ε



Fonte: Acervo do autor

Nesse registro já aparece uma mudança qualitativa em relação à primeira situação de sequência. O estudante opera com a desigualdade envolvendo $|f(x) - L|$, reorganiza-a em função de $|x - a|$ e obtém $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, além de particularizar $\delta = 0{,}01$ para $\varepsilon = 0{,}02$. Há, portanto, mobilização do componente algorítmico articulada à estrutura formal. Em termos de Ball, Thames e Phelps (2008), não se trata apenas de calcular: a atividade exige compreender a relação entre as duas distâncias presentes na definição e produzir uma justificativa que possa ser explicitada no ensino. Essa demanda aproxima-se do conhecimento especializado do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo.

4.4.3. Determinação de δ em Função de ε e Consolidação Progressiva

Na situação seguinte, apresentada na Figura 12, a própria proposta coloca lado a lado duas formas de tratamento: “pela intuição” e “pela definição formal”. Essa organização é especialmente coerente com Fischbein (1994), para quem a atividade matemática envolve a interação entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, e com Fonseca e Henriques (2018), que discutem a atribuição de significado à definição formal mediante conexões entre representações e significados.

Figura 12. Situação de Aprendizagem 3: determinação de δ em função de ε

Situação de Aprendizagem 3: Determinação de δ em função de ε.

Dada a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x - 2$, estude o limite

$$\lim_{x \to 2} f(x).$$

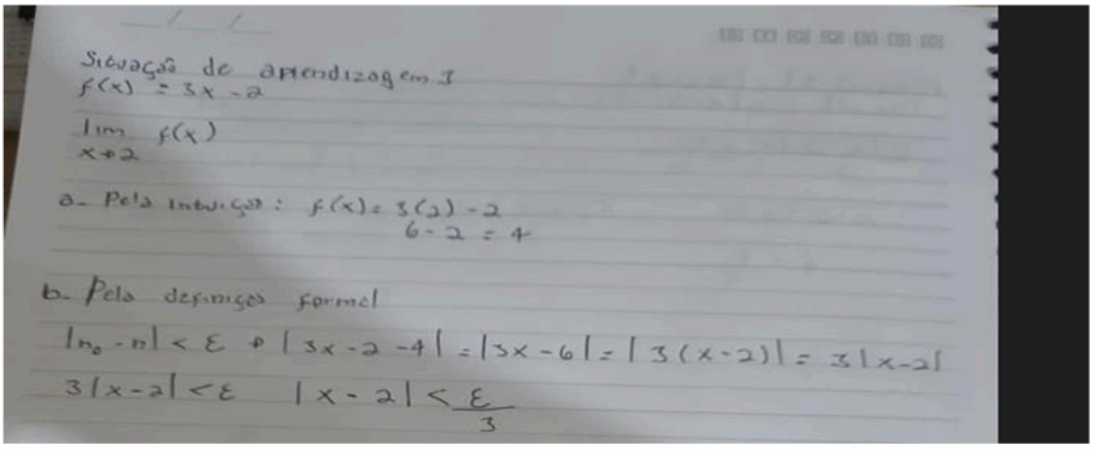
a) Pela intuição.

b) Pela definição formal de limite

Fonte: Acervo do autor

Na Figura 13, a resposta inicia-se pela substituição direta e reconhecimento intuitivo do valor do limite. Em seguida, porém, o estudante reorganiza $|3x-2-4|$ como $3|(x-2)|$ e chega à condição $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Figura 13. Registro da Situação de Aprendizagem 3: da intuição à relação $\delta = \varepsilon/3$



Fonte: Acervo do autor

Diferentemente do registro da Figura 9, a definição formal começa a atuar na resolução: a aproximação já não aparece apenas como descrição intuitiva, mas é convertida em uma condição quantitativa entre ε e δ.

Esse tipo de coordenação é compatível com o processo descrito por Cottrill et al. (1996), no qual a compreensão de limite requer coordenação entre processos, e com estudos posteriores que

enfatizam a necessidade de relacionar a linguagem intuitiva à definição formal.

Figura 14. Situação de Aprendizagem 4: determinação de δ para uma tolerância prescrita

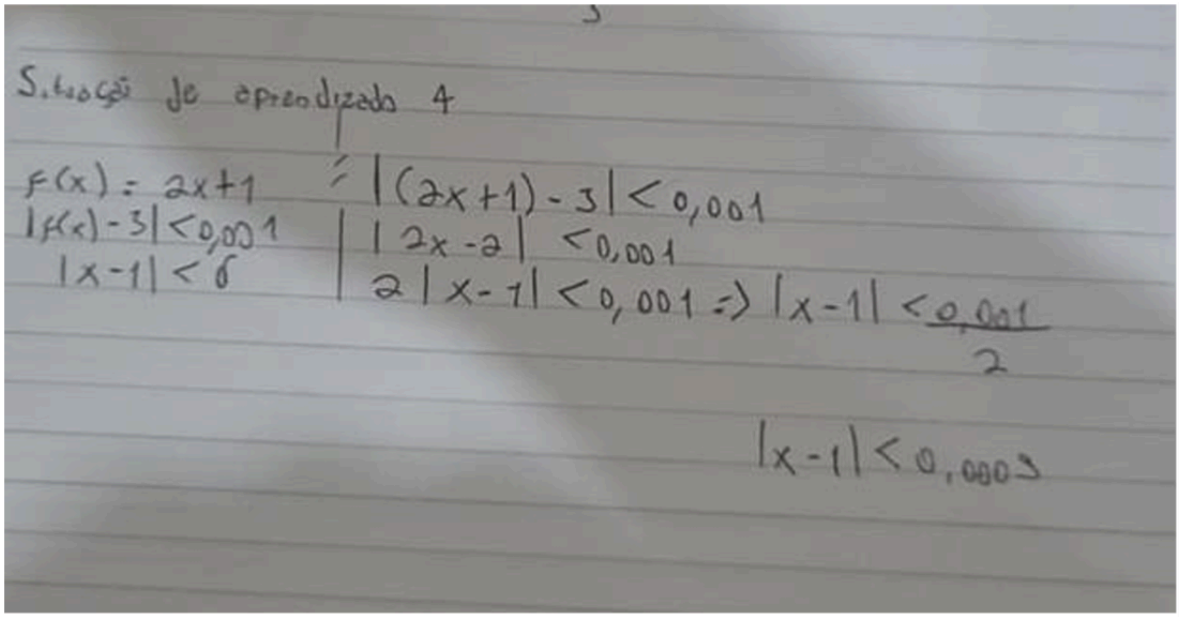
Situação de Aprendizagem 4: Determinação de δ em função de ε.

Dada a função $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$, determinar um número $\delta > 0$, tal que $|f(x) - 3| < 0{,}001$, sempre que $|x - 1| < \delta$.

Fonte: Acervo do autor

A Situação de Aprendizagem 4 torna a exigência ainda mais específica: dado um valor numérico para a tolerância da imagem, deve-se determinar um δ que garanta a desigualdade. No registro da Figura 15, observa-se a passagem de $|(2x+1)-3|<0{,}001$ para $|x-1|<0{,}001$ e, em seguida, para uma condição sobre $|x-1|$. Acompanhe:

Figura 15. Registro da Situação de Aprendizagem 4: controle da distância no domínio



Fonte: Acervo do autor

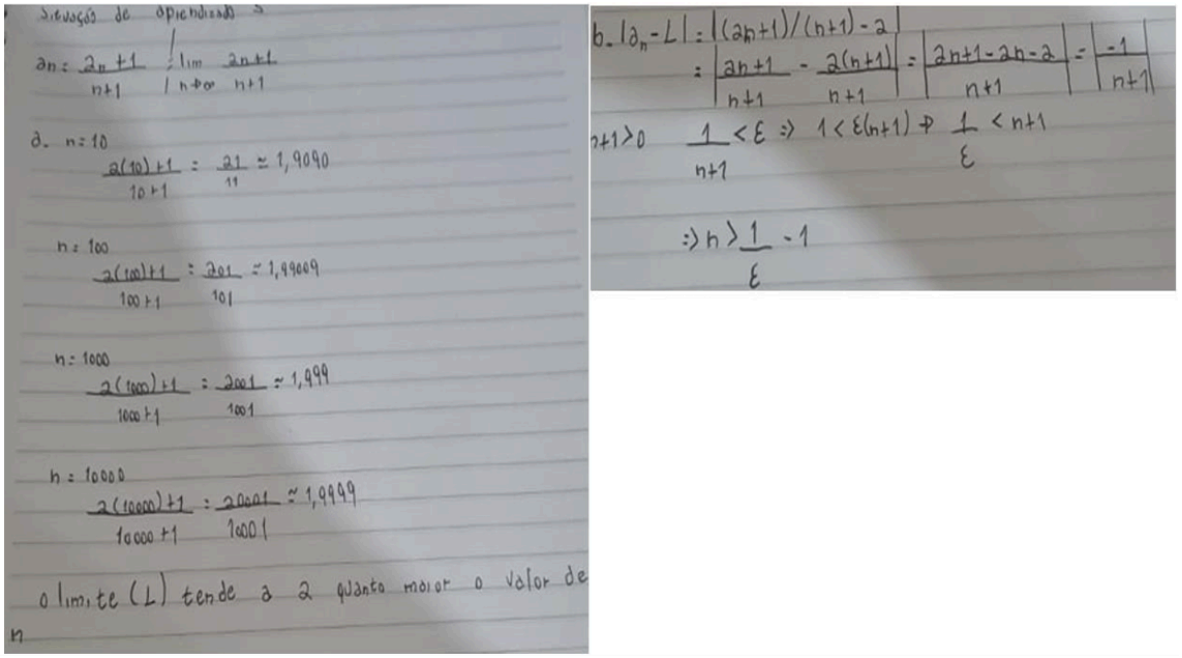
Mesmo com pequenas imprecisões de escrita decimal, o raciocínio passa a se estruturar segundo a lógica da definição. Essa transformação é importante porque evidencia que a formalização não se restringe à reprodução dos quantificadores; ela exige compreender como uma condição sobre $f(x)$ é convertida em uma condição sobre x.

Essa progressão também dialoga com Burigato (2019), ao evidenciar o papel das manipulações algébricas na aprendizagem de limites, e com Rezende (2003), para quem o campo semântico do Cálculo ultrapassa a mera execução de fatorações e cálculos. Como ressalta o autor, "o campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de 'infinito', de 'infinitésimos', de 'variáveis' (Rezende, 2003, p. 18). As atividades formais, portanto, não abandonam os significados construídos anteriormente; passam a organizá-los em uma linguagem matemática mais precisa.

4.4.4. Registro Posterior: Escolha de N em Função de ε

O registro da Figura 16 permite observar um avanço mais nítido em relação à primeira tentativa de demonstração de sequência. Inicialmente, o estudante calcula termos para valores crescentes de n e reconhece numericamente a aproximação a 2. Em seguida, passa a trabalhar com $|a_n - L| < \varepsilon$, simplifica a expressão e obtém uma condição do tipo $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Aqui, pela primeira vez entre os registros selecionados, não se tem apenas a identificação do limite: aparece explicitamente a necessidade de escolher um índice em função de ε.

Figura 16. Registro posterior de formalização do limite de uma sequência



Fonte: Acervo do autor

Esse deslocamento é exatamente um dos pontos mais difíceis da definição formal. Fischbein (1994, p. 238, tradução nossa) observa que “na definição formal, tornamos N dependente de ε. Invertemos a ordem natural do processo de pensamento”. A resposta da Figura 16 sugere que essa inversão, ausente na primeira situação, começa a ser incorporada ao raciocínio do estudante. Não se trata de afirmar que a formalização está definitivamente consolidada, mas de reconhecer uma mudança no tipo de argumento utilizado.

A leitura conjunta dos registros reforça, assim, a necessidade de evitar uma oposição simplista entre intuição e formalização. Santos (1995) já advertia que processos de aproximação progressivamente mais finos podem ser abandonados ao longo da escolarização, produzindo uma compreensão truncada do infinito:

> *"[...] o processo de construção dos campos numéricos na escola [...] e os processos de aproximação cada vez mais finos [...] são abandonados ao longo do ensino ou são enfatizados aspectos particulares que resultam numa ideia truncada do infinito." (Santos, 1995, p. 112).*

Ávila (1991, 1996, 2006) defende que noções de Cálculo podem ser trabalhadas de modo progressivo e significativo; Neto (2006) discute possibilidades de tratamento computacional do limite; e Pietropaolo (2005) enfatiza a relevância da demonstração na formação matemática. Em conjunto com Ball, Thames e Phelps (2008), Shulman (1986), Tall e Vinner (1981), Fischbein (1994) e os estudos específicos sobre limite já citados, esses referenciais ajudam a compreender o percurso observado como construção progressiva de significados, procedimentos e formas de validação.

A organização progressiva das atividades também converge com a orientação curricular de investigar padrões, formular conjecturas e reconhecer a necessidade de formas crescentes de validação matemática (Brasil, 2018), bem como com os princípios de contextualização e abstração presentes em documentos curriculares nacionais e estaduais (Brasil, 1997; São Paulo, 2011).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

À luz do objetivo proposto, a análise da experiência docente desenvolvida ao longo de um semestre letivo indica que a construção do conceito de limite ocorreu de forma progressiva, a partir da articulação entre compreensões intuitivas e formas mais sistematizadas de representação, argumentação e justificação matemática. Nas aulas regulares de Cálculo Diferencial e Integral,

com licenciandos em Matemática e estudantes de Engenharia de Software, esse percurso envolveu noções de infinito, infinitésimo, convergência, aproximação e limites de sequências e de funções, sem que a passagem ao formal ocorresse de maneira imediata ou linear.

Os registros evidenciam que, inicialmente, predominaram interpretações baseadas em expressões como “aproximar-se”, “tender a” e “ficar cada vez menor”, acompanhadas de dificuldades algébricas e conceituais. Posteriormente, as aproximações numéricas passaram a ser relacionadas ao comportamento das funções e, nas atividades de formalização, surgiram relações entre épsilon e delta e a determinação de uma condição para N em função de épsilon. Esses movimentos constituem indícios de ampliação do repertório utilizado pelos estudantes para interpretar e justificar matematicamente o limite.

Esse percurso, encontrado no referencial teórico e, igualmente, na revisão de literatura, permite analisar a articulação entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal e situar essas relações no âmbito dos conhecimentos matemáticos necessários ao ensino. Como contribuição para o ensino de Cálculo, os resultados reforçam que intuição e formalização não devem ser tratadas como dimensões excludentes. A aproximação intuitiva pode constituir um ponto de partida para a construção de significados, desde que seja progressivamente articulada aos procedimentos e às justificativas formais.

Estudos futuros podem aprofundar essa discussão em situações envolvendo limites de maior complexidade e investigar como

futuros professores mobilizam essas compreensões na elaboração de propostas para a Educação Básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUJO, D. L. O que é (e como faz sequência didática)? **Entrepalavras,** v. 3, n. 1, p. 322-334, jan./jul. 2013.

ÁVILA, G. As séries infinitas. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, n. 30, p. 10-17, 1996.

ÁVILA, G. Limites e derivadas no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática,** n. 60, 2006.

ÁVILA, G. O ensino do Cálculo no segundo grau. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, n. 18, p. 1-9, 1991.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education,** v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. DOI: 10.1177/0022487108324554.

BARTO, M. C. **Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de Cálculo: a produção de significados para continuidade.** 2004. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília, DF: MEC, 1997.

BURIGATO, S. M. M. S. **Um estudo sobre a aprendizagem do conceito de limite de função por estudantes nos contextos Brasil e França.** 2019. 258 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2019.

COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; NICHOLS, D.; SCHWINGENDORF, K.; THOMAS, K.; VIDAKOVIC, D. Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. **Journal of Mathematical Behavior,** v. 15, n. 2, p. 167-192, 1996.

FACCIN, G. M. **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015.

FERREIRA, Ronaldo Dias. **Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas.** 2021. 289 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄSSER, R.; WINKELMANN, B. (org.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 231-245.

FONSECA, V.; HENRIQUES, A. Compreensão da definição formal de limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. **Bolema,** v. 32, n. 62, 2018.

JORDAAN, T. **Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students.** 2005. Dissertação (Master of Education) – University of South Africa, Pretoria, 2005.

KIRNEV, Debora Cristiane Barbosa. **Análise matemática.** Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016. 192 p.

MESSIAS, M. A. V. F.; BRANDEMBERG, J. C. Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais. **Bolema,** v. 29, n. 53, p. 1224-1241, 2015.

MINAYO, M. C. S. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. **Ciência & Saúde Coletiva,** Rio de Janeiro, v. 17, n. 3, p. 621-626, 2012. DOI: 10.1590/S1413-81232012000300007.

NAGAMINE, André. Definição formal de limites: o GeoGebra pode ajudar? **Brazilian Journal of Development,** Curitiba, v. 9, n. 5, p. 15377–15393, 2023.

NAIR, G. S. **College students' concept images of asymptotes, limits, and continuity of rational functions.** 2010. Tese (Doctor of Philosophy) – Ohio State University, Columbus, 2010.

NETO, J. P. S. **Um estudo sobre o ensino de limite: um tratamento computacional com aplicações.** 2006. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ORFALI, F.; PONTE, T. A. P. Contextualização e formalismo matemático no ensino de limites e continuidade: um estudo de caso. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez. **Educación Matemática en las Américas 2015.** v. 10, p. 67-78, 2015.

PANONCELI, D. M. **Análise Matemática.** Curitiba: InterSaberes, 2017.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.** 2005. 249 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS, V. M. **O infinito: concepções e consequências pedagógicas.** 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.** São Paulo: SEE-SP, 2011.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher,** v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SOUZA, R. F.; PERROTTA, S. G. M.; BRAGA, M.; SANTOS, F. R. Contribuições da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nas práticas docentes para o futuro professor de matemática. **Contribuciones a Las Ciencias Sociales,** São José dos Pinhais, v. 17, n. 3, p. 1-22, 2024. DOI: 10.55905/revconv.17n.3-152.

SOUZA, R. F.; PIETROPAOLO, R. C. Um estudo sobre conhecimentos necessários ao futuro professor de Matemática para a exploração de séries no Ensino Médio. **Revista Cearense de Educação Matemática,** v. 5, n. 9, p. 1-21, 2026. DOI: 10.56938/v5i9.4784.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 3-21.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics,** v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981. DOI: 10.1007/BF00305619.

THOMAS, G. B. **Cálculo.** 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.

VILLANI, V.; BERNARDI, C.; ZOCCANTE, S.; PORCARO, R. **Non solo calcoli: domande e risposte sui perché della matematica.** Milano: Springer, 2012.

---

[1] Pós-Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática – Univ. Cruzeiro do Sul, Doutor em Educação Matemática – UNIAN-SP, Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Univ. Cruzeiro do Sul, Especialista em Educação Matemática – UNIMES. Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática EaD e Semipresencial (UNISA). Docente da Universidade Santo Amaro (UNISA), Rua Isabel Schmidt, 349, Santo Amaro, São Paulo – SP, CEP 04743-030, Brasil. Professor da Faculdade de Tecnologia FATEC. Professor da Escola Técnica Estadual ETEC. E-mail: acesse o artigo original para visualizar o e-mail. Lattes: https://lattes.cnpq.br/1119358252784389. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-0418-0147

[2] Doutor em Ciências da Computação – UNICAMP, Mestre em Ciências da Computação – UNICAMP, Coordenador do Mestrado Profissional (MP) em Ensino de Ciências e Matemática – Univ.

Cruzeiro do Sul, Bacharel em Informática. Professor Permanente do Programa de Doutorado/Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – Univ. Cruzeiro do Sul. E-mail: acesse o artigo original para visualizar o e-mail. Lattes: http://lattes.cnpq.br/0047384210554210. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8552-7984

[3] Intervalo aberto é um trecho da reta real dentro do qual as bordas não estão incluídas. Por exemplo: um intervalo aberto que varia entre -1 e 1 é definido da seguinte maneira: $x \in (R \mid -1 < x < 1;$ ou seja, - 1 e 1 não fazem parte do intervalo. (Faccin, 2015, p. 42).