

**ANÁLISE NUMÉRICA
TRIDIMENSIONAL DA
FLEXÃO DE VIGAS DE AÇO
COM DIFERENTES
MOMENTOS DE INÉRCIA:
VERIFICAÇÃO POR
ELEMENTOS FINITOS E
COMPARAÇÃO COM A
TEORIA CLÁSSICA**

**THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL ANALYSIS OF BENDING IN STEEL
BEAMS WITH DIFFERENT MOMENTS OF INERTIA: FINITE ELEMENT
VERIFICATION AND COMPARISON WITH CLASSICAL BEAM THEORY**

Engenharias • 08/10/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/791436961](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/791436961)

Luan Henrique Varão Silva¹

Gilson Gomes da Silva Júnior²

Guilherme Araujo Valença³

Andrey Alves Herédia de Sá⁴

Natália Garcia Leite Silva⁵

Valéria Silva Lima⁶

Walter José Silva da Costa Junior⁷

Walterley Moreira de Jesus Neto⁸

Bárbara de Melo Lopes⁹

RESUMO

O artigo investiga a influência do momento de inércia da seção transversal no comportamento à flexão de vigas de aço biapoeadas, comparando resultados de um modelo tridimensional por elementos finitos com as previsões das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Foram estudadas três seções com a mesma largura de 100 mm: retangular maciça (100 × 50 mm), em T e em I (duplo T), ambas com 100 mm de altura e chapas de 10 mm, sob carga de 5 kN no meio de um vão de 2 m. Os modelos foram discretizados com elementos hexaédricos quadráticos de 20 nós (C3D20R) no programa de código aberto CalculiX, com estudo de convergência de malha em três níveis. As flechas numéricas diferiram menos de 1,0 % da solução de Timoshenko em todas as seções, e as tensões normais em seção afastada do ponto de carga reproduziram a distribuição linear de Navier com erro inferior a 0,1 %. A seção em I, com momento de inércia 4,3 vezes maior que o da retangular, apresentou flecha 4,1 vezes menor e tensão máxima 2,1 vezes menor, utilizando 44 % menos aço. A seção em T evidenciou a assimetria de tensões decorrente do deslocamento da linha neutra. O trabalho discute ainda os erros de um modelo preliminar, atribuídos à formulação de integração reduzida com malha grosseira e à carga pontual, e propõe um roteiro de verificação útil ao ensino de Resistência dos Materiais.

Palavras-chave: Resistência dos Materiais; Momento de Inércia; Flexão Simples; Método dos Elementos Finitos; Vigas de Aço.

ABSTRACT

The article investigates the influence of the cross-section moment of inertia on the bending behavior of simply supported steel beams, comparing results from a three-dimensional finite element model with the predictions of Euler-Bernoulli and Timoshenko beam

theories. Three sections with the same 100 mm width were studied: a solid rectangle (100 × 50 mm), a T-section and an I-section, both 100 mm deep with 10 mm plates, under a 5 kN load at the midspan of a 2 m span. The models were discretized with 20-node quadratic hexahedral elements (C3D20R) in the open-source program CalculiX, with a three-level mesh convergence study. Numerical deflections differed by less than 1.0 % from the Timoshenko solution for all sections, and normal stresses at a section away from the load point reproduced the linear Navier distribution with errors below 0.1 %. The I-section, with a moment of inertia 4.3 times greater than the rectangular one, showed a deflection 4.1 times smaller and a maximum stress 2.1 times smaller, while using 44 % less steel. The T-section highlighted the stress asymmetry caused by the shift of the neutral axis. The work also discusses the errors of a preliminary model, attributed to the reduced-integration formulation with a coarse mesh and to the point load, and proposes a verification routine useful for teaching Mechanics of Materials.

Keywords: Mechanics Of Materials; Moment Of Inertia; Simple Bending; Finite Element Method; Steel Beams.

1. INTRODUÇÃO

O dimensionamento de vigas é, na prática corrente da engenharia estrutural, conduzido por expressões analíticas deduzidas da teoria clássica da flexão, que admite material homogêneo, isótropo e elástico linear, pequenos deslocamentos e seções transversais que permanecem planas após a deformação (Hibbeler, 2010; Gere; Goodno, 2010). Essas hipóteses conduzem a resultados simples e de grande utilidade, como a fórmula de Navier para as tensões normais e as equações da linha elástica para os deslocamentos, nas quais o momento de inércia da seção transversal (I) aparece como a

propriedade geométrica que governa a rigidez e a resistência à flexão.

O papel de I é conhecido desde os primeiros cursos de Resistência dos Materiais: para um mesmo momento fletor, a tensão máxima é inversamente proporcional ao módulo de resistência $W = I/c$, e a flecha é inversamente proporcional ao produto EI . Daí decorre a preferência, em estruturas metálicas, por perfis em I, que afastam o material da linha neutra e obtêm grande momento de inércia com pouca área (Pfeil; Pfeil, 2009). A compreensão quantitativa desse efeito, entretanto, costuma permanecer abstrata para o estudante enquanto não é confrontada com uma representação do campo completo de tensões e deslocamentos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite obter esse campo completo em geometrias tridimensionais, sem as hipóteses cinemáticas da teoria de vigas (Zienkiewicz; Taylor; Zhu, 2013; Cook *et al.*, 2002). O seu uso, porém, exige cuidados: a escolha do tipo de elemento, a densidade da malha e a forma de aplicação das cargas e dos apoios influenciam fortemente a qualidade dos resultados, e um modelo mal construído pode produzir valores fisicamente implausíveis que, se não forem confrontados com uma solução de referência, passam despercebidos (Bathe, 1996). A verificação de modelos numéricos contra soluções analíticas conhecidas é, portanto, etapa indispensável tanto na prática profissional quanto no ensino.

Silva (2022) comparou as teorias de Bernoulli e de Timoshenko para diferentes condições de contorno e mostrou que a parcela de deformação por cisalhamento, desprezada na primeira, torna-se relevante em vigas curtas ou com alma delgada. Esse aspecto é

explorado no presente trabalho, que utiliza as duas teorias como referência para avaliar um modelo sólido tridimensional.

Neste contexto, o artigo analisa numericamente o comportamento à flexão de três vigas de aço de mesma largura e mesmo vão, com seções retangular, em T e em I, e portanto com momentos de inércia distintos. O objetivo geral é quantificar a influência do momento de inércia sobre flechas e tensões e verificar a aderência de um modelo tridimensional por elementos finitos à teoria clássica. Como objetivos específicos, o trabalho busca: (i) calcular analiticamente as propriedades geométricas das seções; (ii) construir modelos sólidos com elementos quadráticos e avaliar a convergência da malha; (iii) comparar flechas e tensões numéricas com as soluções de Euler-Bernoulli e de Timoshenko; (iv) relacionar a rigidez obtida ao consumo de material de cada seção; e (v) discutir, a partir de um modelo preliminar com resultados inconsistentes, os erros de modelagem mais frequentes em trabalhos acadêmicos que empregam o MEF.

O artigo está organizado da seguinte forma: a seção 2 apresenta a fundamentação teórica; a seção 3 descreve as seções estudadas e o modelo numérico; a seção 4 apresenta os resultados; a seção 5 discute os resultados, o modelo preliminar e as limitações do estudo; e a seção 6 reúne as conclusões.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Flexão Simples e Tensões Normais

Na teoria de Euler-Bernoulli, a hipótese de que as seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado implica que a deformação longitudinal varia linearmente com a distância à

linha neutra. Com material elástico linear, a tensão normal em um ponto da seção, a uma distância y da linha neutra, é dada pela fórmula de Navier (Hibbeler, 2010):

$$\sigma = M \cdot y / I \quad (1)$$

em que M é o momento fletor atuante e I é o momento de inércia da seção em relação ao eixo neutro, que passa pelo centroide. A tensão máxima ocorre na fibra mais afastada, a uma distância c da linha neutra, e pode ser escrita como $\sigma_{\text{máx}} = M/W$, com $W = I/c$. Em seções simétricas em relação ao eixo de flexão, as tensões máximas de tração e compressão têm o mesmo módulo; em seções assimétricas, como a seção em T, a linha neutra se aproxima da mesa, e a fibra oposta, mais distante, concentra a maior tensão.

Para seções compostas por retângulos, o momento de inércia em relação ao eixo centroidal é obtido pelo teorema dos eixos paralelos (teorema de Steiner):

$$I = \sum [b_i \cdot h_i^3 / 12 + A_i \cdot (\bar{y}_i - \bar{y})^2] \quad (2)$$

em que b_i , h_i , A_i e $\bar{y}_i$ são, respectivamente, a largura, a altura, a área e a ordenada do centroide de cada retângulo, e $\bar{y}$ é a ordenada do centroide da seção completa. A omissão da parcela de transporte $A_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2$ é um erro frequente que superestima ou subestima I em seções assimétricas, como se verá na seção 5.

2.2. Deslocamentos: Teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko

A curvatura do eixo da viga é proporcional ao momento fletor e inversamente proporcional à rigidez à flexão EI , $\kappa = M/(EI)$. Integrando-se a equação diferencial da linha elástica para uma viga

biapoiada de vão L com carga concentrada P no meio do vão, obtém-se a flecha máxima (Gere; Goodno, 2010):

$$\delta_{EB} = P \cdot L^3 / (48 \cdot E \cdot I) \quad (3)$$

A teoria de Timoshenko abandona a hipótese de que a seção permanece perpendicular ao eixo deformado e acrescenta a parcela de deslocamento associada à deformação por cisalhamento. Para o mesmo caso de carregamento, a flecha total é:

$$\delta_T = P \cdot L^3 / (48 \cdot E \cdot I) + P \cdot L / (4 \cdot \kappa \cdot G \cdot A) \quad (4)$$

em que $G = E/[2(1 + \nu)]$ é o módulo de elasticidade transversal e κA é a área efetiva de cisalhamento. Para a seção retangular adota-se $\kappa = 5/6$; para seções em I e em T, uma aproximação usual consiste em tomar como área efetiva a área da alma, $h \cdot t_w$ (Cowper, 1966; Timoshenko; Goodier, 1970). A segunda parcela da Equação (4) cresce, relativamente à primeira, quando a relação vão/altura diminui ou quando a alma é delgada, o que torna a teoria de Timoshenko a referência mais adequada para comparar com modelos sólidos tridimensionais, que capturam naturalmente a deformação por cisalhamento.

2.3. Método dos Elementos Finitos

O MEF divide o domínio contínuo em subdomínios (elementos) conectados por nós, nos quais os deslocamentos são as incógnitas. Em cada elemento, o campo de deslocamentos é aproximado por funções de forma, e a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais conduz ao sistema de equações de equilíbrio global:

$$K \cdot u = f \quad (5)$$

em que K é a matriz de rigidez global, u é o vetor de deslocamentos nodais e f é o vetor de forças nodais equivalentes (Bathe, 1996; Zienkiewicz; Taylor; Zhu, 2013). Após a imposição das condições de contorno e a solução do sistema, as deformações e tensões são obtidas por derivação dos deslocamentos nos pontos de integração e extrapoladas aos nós para visualização.

Em problemas dominados por flexão, a escolha do elemento é decisiva. Elementos hexaédricos lineares de oito nós com integração completa sofrem travamento por cisalhamento (*shear locking*) e se mostram excessivamente rígidos; com integração reduzida em um único ponto (C3D8R), eliminam o travamento, mas introduzem modos espúrios de energia nula, os modos de ampulheta (*hourglass*), que precisam ser controlados artificialmente e que, com poucos elementos ao longo da altura, podem levar a deslocamentos muito maiores que os reais (Flanagan; Belytschko, 1981; Cook *et al.*, 2002). Elementos quadráticos de vinte nós com integração reduzida (C3D20R) representam bem a variação linear de tensões ao longo da altura, mesmo com poucos elementos, e são a escolha recomendada para análises de flexão com elementos sólidos (Dhondt, 2004).

Outro aspecto relevante é a forma de aplicação de cargas e apoios. Uma força concentrada aplicada a um único nó de um modelo sólido gera, pela teoria da elasticidade, tensões teoricamente infinitas nas vizinhanças do ponto de aplicação, de modo que o valor máximo lido no pós-processamento cresce indefinidamente com o refinamento da malha. Pelo princípio de Saint-Venant, esse efeito é local e se dissipa a uma distância da ordem da altura da seção (Timoshenko; Goodier, 1970). Por isso, a verificação das tensões de

flexão deve ser feita em seções afastadas dos pontos de carga e de apoio, ou com a carga distribuída sobre uma área finita.

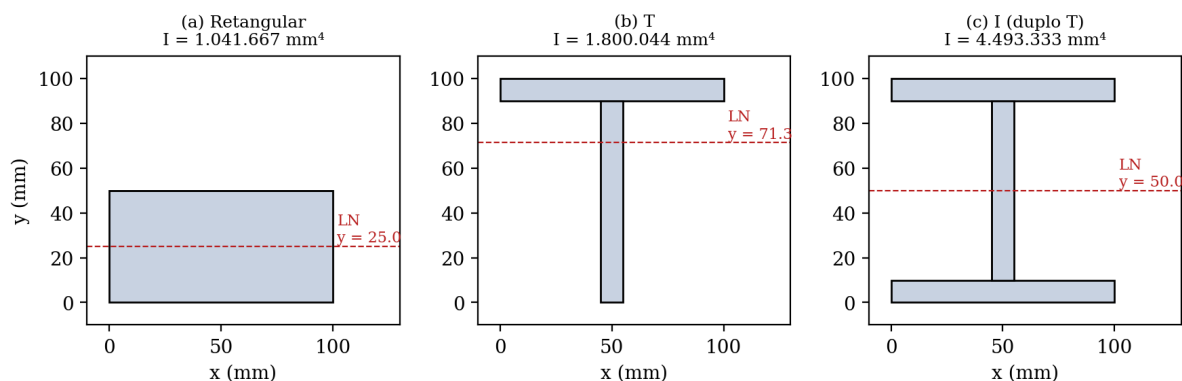
3. MATERIAIS E MÉTODOS

O estudo tem natureza aplicada e abordagem quantitativa, com caráter descritivo e explicativo. Consiste na modelagem numérica de três vigas de aço, na verificação dos resultados contra soluções analíticas e na comparação entre as seções. Todas as etapas foram conduzidas com ferramentas de código aberto, de modo que os modelos possam ser reproduzidos integralmente por outros estudantes e docentes.

3.1. Seções Transversais e Propriedades Geométricas

Foram estudadas três seções com a mesma largura total de 100 mm (Figura 1). A seção retangular maciça tem 100 mm de largura e 50 mm de altura. A seção em T tem mesa de 100 × 10 mm e alma de 10 × 90 mm, totalizando 100 mm de altura. A seção em I tem duas mesas de 100 × 10 mm e alma de 10 × 80 mm, também com 100 mm de altura. A escolha preserva a largura e varia a distribuição de material ao longo da altura, isolando o efeito da geometria sobre o momento de inércia.

Figura 1. Seções transversais estudadas, com a posição da linha neutra (LN) e o momento de inércia em relação ao eixo de flexão (dimensões em mm)



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

As propriedades geométricas foram calculadas pela Equação (2) e estão reunidas na Tabela 1. Na seção em T, o centroide situa-se a 71,3 mm da base, de modo que a fibra inferior (tracionada) dista 71,3 mm da linha neutra e a fibra superior, apenas 28,7 mm. A tabela apresenta também a massa linear, calculada com massa específica de 7850 kg/m^3 , e o índice W/A , que mede a eficiência da seção à flexão por unidade de área.

Tabela 1. Propriedades geométricas das seções ($\bar{y}$ medido a partir da face inferior)

Seção	A (mm ²)	$\bar{y}$ (mm)	I (mm ⁴)	W_{min} (mm ³)	Mass (kg/m)
Retangular r 100 × 50	5.000	25,0	1.041.667	41.667	39,3
T (100 × 100 × 10)	1.900	71,3	1.800.044	25.240	14,9
I (100 × 100 × 10)	2.800	50,0	4.493.333	89.867	22,0

△ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/analise-numerica-tridimensional-da-flexao-de-vigas-de-aco-com-diferentes-momentos-de>

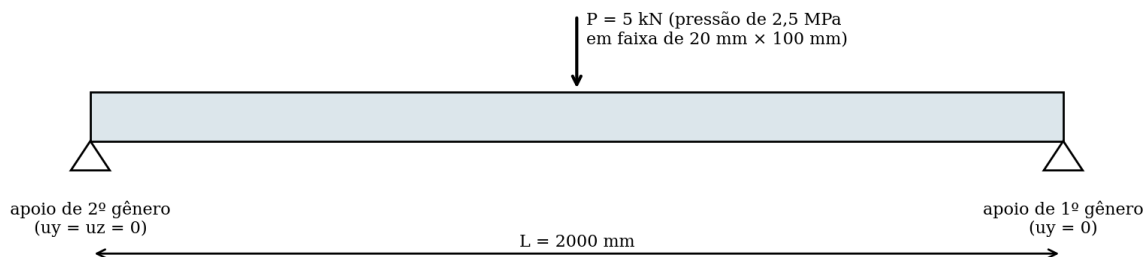
Fonte: elaborado pelos autores (2026).

3.2. Material, Geometria e Condições de Contorno

O aço foi modelado como material homogêneo, isótropo e elástico linear, com módulo de elasticidade $E = 210$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, o que resulta em $G = 80,8$ GPa. As vigas têm vão $L = 2000$ mm e foram modeladas como sólidos obtidos pela extrusão das seções ao longo do eixo longitudinal z (Figura 2). O eixo y é vertical e o eixo x é horizontal no plano da seção. Todas as grandezas foram expressas no sistema coerente N, mm e MPa, o que elimina erros de conversão de unidades.

Os apoios foram representados por restrições aplicadas à linha de nós da face inferior em cada extremidade. Na extremidade $z = 0$, restringiram-se os deslocamentos vertical e longitudinal (apoio de segundo gênero); na extremidade $z = L$, apenas o deslocamento vertical (apoio de primeiro gênero). Um único nó da extremidade $z = 0$ teve o deslocamento transversal x restringido para eliminar o movimento de corpo rígido. A carga total $P = 5$ kN foi aplicada como pressão uniforme de 2,5 MPa sobre uma faixa de 20 mm de comprimento por 100 mm de largura na face superior, centrada no meio do vão, evitando a singularidade de uma força nodal isolada.

Figura 2. Esquema estático do modelo: viga biapoiada com carga distribuída em faixa estreita no meio do vão.



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

3.3. Discretização e Solução

As malhas foram geradas por um programa em Python desenvolvido pelos autores, que subdivide cada seção em uma grade estruturada compatível com as mesas e a alma e a extruda ao longo do vão, com linhas de malha coincidentes com os limites da faixa carregada. Empregou-se o elemento hexaédrico quadrático de 20 nós com integração reduzida (C3D20R). O sistema foi resolvido por análise estática linear no programa CalculiX, versão 2.21 (Dhondt, 2004; Dhondt, 2023), e os resultados de deslocamentos e tensões nodais foram lidos do arquivo de saída e pós-processados em Python.

Para avaliar a convergência, cada seção foi analisada com três níveis de refinamento. O nível 1 usa elementos de 10 mm no plano da seção e de 50 mm ao longo do vão; o nível 2, de 5 mm e 25 mm; e o nível 3, de 5 mm e 10 mm (para a seção retangular, de 5 mm e 20 mm, por limitação de memória computacional). Com elementos de 5 mm, as chapas de 10 mm recebem dois elementos quadráticos na espessura e a alma recebe entre 16 e 18 elementos na altura.

3.4. Grandezas de Comparação

A flecha numérica foi tomada como o deslocamento vertical do nó situado no centro da face inferior, no meio do vão, ponto que não é

afetado pelo esmagamento local sob a faixa carregada. A tensão de flexão foi avaliada pela componente normal longitudinal σ_z , que corresponde à tensão σ da fórmula de Navier, e não pela tensão equivalente de von Mises, que combina todas as componentes e não é a grandeza prevista pela Equação (1). Foram comparadas a tensão σ_z na fibra inferior do meio do vão e a distribuição de σ_z ao longo da altura em uma seção situada a cerca de 146 mm do centro, fora da zona de perturbação da carga. Os erros relativos foram calculados como (valor numérico – valor analítico)/valor analítico.

4. RESULTADOS

4.1. Convergência da Malha

A Tabela 2 mostra a evolução da flecha e da tensão σ_z na fibra inferior do meio do vão com o refinamento da malha. As variações entre os níveis 2 e 3 são inferiores a 0,05 % na flecha e na tensão para as três seções, o que indica que os resultados estão convergidos. O nível 3 foi adotado como referência nas comparações seguintes, e o nível 2 foi usado na produção das figuras.

Tabela 2. Estudo de convergência da malha (flecha e tensão normal na fibra inferior do meio do vão)

Seção	Nível	Elementos	Nós	δ (mm)	σ_z infe (MPa)
Retangular	1	2.100	10.555	3,8137	59,6
	2	16.400	73.805	3,8139	59,6
	3	20.400	91.645	3,8139	59,6

T	I	756	5.595	2.2479	99,4
---	---	-----	-------	--------	------

⚠ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/analise-numerica-tridimensional-da-flexao-de-vigas-de-aco-com-diferentes-momentos-de-inercia-verificacao-por-elementos-finitos-e-comparacao-com-a-teoria-classica?noblockage>

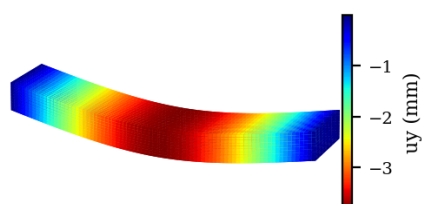
Fonte: elaborado pelos autores (2026).

4.2. Campos de Deslocamento e de Tensão

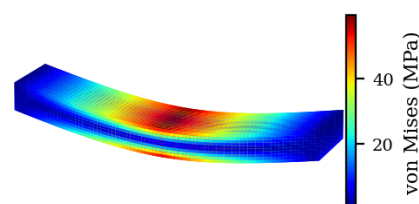
A Figura 3 apresenta a configuração deformada das três vigas, com deslocamentos ampliados para visualização, colorida pelo deslocamento vertical e pela tensão de von Mises. Em todos os casos a deformada é simétrica em relação ao meio do vão, com deslocamento máximo no centro. Os campos de von Mises mostram as maiores tensões nas fibras extremas da região central, onde o momento fletor é máximo, e uma faixa de baixa tensão ao longo da linha neutra. Na seção em T, a faixa de baixa tensão aparece deslocada para a mesa superior, e a fibra inferior da alma concentra as maiores tensões. Na seção em I, as mesas trabalham de forma praticamente uniforme e a alma apresenta tensões baixas, o que ilustra a eficiência dessa geometria.

Figura 3. Configuração deformada (deslocamentos ampliados; escala transversal ampliada para visualização) com deslocamento vertical u_y (à esquerda) e tensão de von Mises (à direita). A escala de von Mises foi limitada ao percentil 99,5 para não ser dominada pelos picos localizados nos apoios

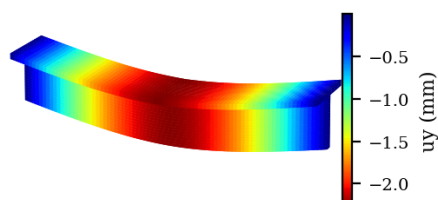
(a) Retangular: deslocamento vertical



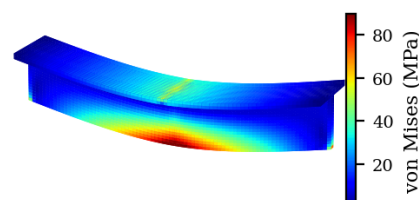
(b) Retangular: tensão de von Mises



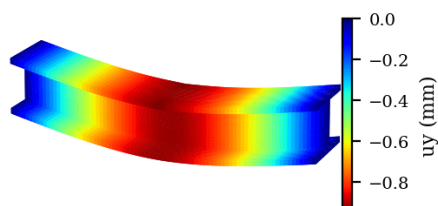
(c) T: deslocamento vertical



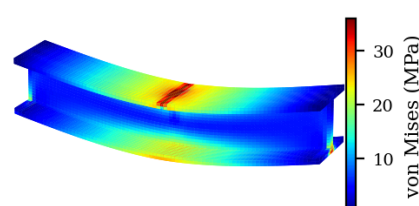
(d) T: tensão de von Mises



(e) I (duplo T): deslocamento vertical



(f) I (duplo T): tensão de von Mises



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Picos localizados de von Mises aparecem junto à faixa carregada e, principalmente, nas linhas de apoio, onde a reação é transmitida por uma linha de nós. Com a malha do nível 3, esses picos atingem cerca de 174 MPa no apoio da seção em T, cuja alma de 10 mm apoia-se em uma linha de apenas 10 mm de largura, e 71 MPa no apoio da seção em I. Esses valores crescem com o refinamento da malha e não representam o comportamento de flexão, conforme discutido na seção 5.

4.3. Comparação com a Teoria Clássica

A Tabela 3 compara as flechas numéricas com as Equações (3) e (4) e as tensões na fibra inferior com a Equação (1). Em relação à solução de Euler-Bernoulli, as diferenças nas flechas são de 0,1 % na seção retangular, 2,1 % na seção em T e 4,5 % na seção em I. Quando se inclui a parcela de cisalhamento de Timoshenko, as diferenças caem para -0,1 %, 0,7 % e 1,0 %, respectivamente. As tensões normais na fibra inferior do meio do vão diferem da fórmula de Navier em -0,6 %, 0,4 % e 3,9 %.

Tabela 3. Flechas e tensões normais máximas (fibra inferior, meio do vão): MEF × teorias de Euler-Bernoulli (EB) e Timoshenko (T)

Seção	δ_{EB} (mm)	δ_T (mm)	δ_{MEF} (mm)	Dif. EB	Dif. T
Retangular	3,810	3,817	3,814	+0,1 %	-0,1 %
T	2,205	2,235	2,250	+2,1 %	+0,7 %
I	0,883	0,914	0,923	+4,5 %	+1,0 %

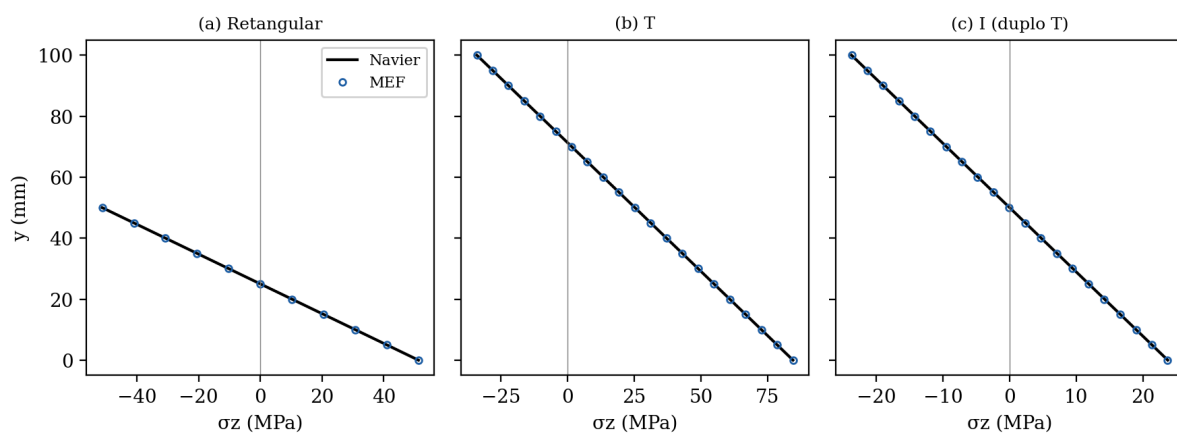
⚠ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/analise-numerica-tridimensional-da-flexao-de-vigas-de-aco-com-diferentes-momentos-de-inercia-verificacao-por-elementos-finitos-e-comparacao-com-a-teoria-classica?noblockage>

Fonte: elaborado pelos autores (2026).

A Figura 4 mostra a distribuição de σ_z ao longo da altura, no eixo de simetria da seção, a 146 mm do meio do vão, comparada com a reta de Navier para o momento fletor atuante naquela seção ($M = 2,13$ kN·m). A concordância é praticamente perfeita nas três seções: as

diferenças nas fibras extremas são inferiores a 0,1 % (por exemplo, 84,62 MPa no MEF contra 84,57 MPa pela Equação (1) na fibra inferior da seção em T). A figura evidencia também a assimetria da seção em T, com tensão de tração na fibra inferior 2,5 vezes maior que a de compressão na fibra superior.

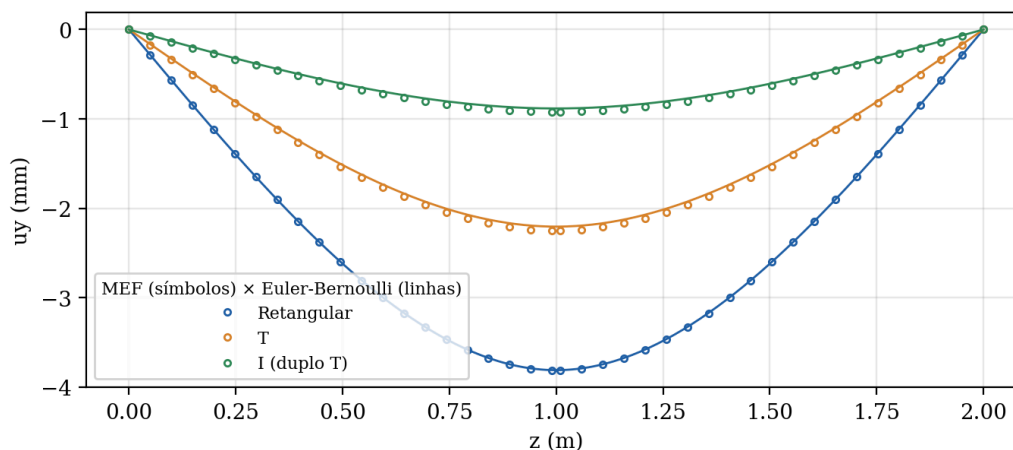
Figura 4. Distribuição da tensão normal σ_z ao longo da altura em seção situada a 146 mm do meio do vão: MEF (símbolos) × fórmula de Navier (linha).



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

A linha elástica ao longo do vão (Figura 5), medida na face inferior, coincide com a solução analítica em toda a extensão das vigas, e não apenas no ponto de flecha máxima. Isso confirma que as condições de apoio do modelo sólido reproduzem o esquema estático biapoiado admitido na teoria.

Figura 5. Linha elástica das três vigas: MEF (símbolos) × solução de Euler-Bernoulli (linhas).



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

4.4. Influência do Momento de Inércia

Tomando a seção retangular como referência, a seção em T tem momento de inércia 1,73 vez maior e apresentou flecha 1,69 vez menor; a seção em I tem momento de inércia 4,31 vezes maior e apresentou flecha 4,13 vezes menor. A proporcionalidade inversa entre I e δ prevista pela Equação (3) é, portanto, confirmada, com pequeno desvio atribuído à parcela de cisalhamento, que tem peso relativo maior nas seções de alma delgada. A Tabela 4 resume esses indicadores e os relaciona ao consumo de aço.

Tabela 4. Indicadores comparativos de desempenho (valores numéricos do MEF, nível 3)

Seção	I/I_{ret}	δ_{ret}/δ	$\sigma_{m\acute{a}x}$ (MPa)	Massa/ Massa _{ret}	Rigid por massa (relati
Retangular	1,00	1,00	59,7	1,00	1,00
T	1,73	1,69	99,5	0,38	4,46
I	4,31	4,13	28,9	0,56	7,38

⚠ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/analise-numerica-tridimensional-da-flexao-de-vigas-de-aco-com-diferentes-momentos-de-inercia-verificacao-por-elementos-finitos-e-comparacao-com-a-teoria-classica?noblockage>

Fonte: elaborado pelos autores (2026).

A comparação mostra que o aumento de rigidez não depende da quantidade de material, e sim da sua distribuição em relação à linha neutra. A seção em I usa 44 % menos aço que a retangular e é 4,1 vezes mais rígida, o que corresponde a uma rigidez por unidade de massa 7,4 vezes maior. A seção em T, embora mais rígida que a retangular e com apenas 38 % da sua massa, apresentou a maior tensão máxima entre as três (99,5 MPa), porque o seu módulo de resistência mínimo, governado pela fibra inferior distante da linha neutra, é o menor do conjunto (Tabela 1). Assim, rigidez e resistência à flexão não são governadas pela mesma propriedade: a primeira depende de I , e a segunda, de $W_{\min}$.

5. DISCUSSÃO

5.1. Aderência do Modelo à Teoria

Os resultados indicam que um modelo sólido tridimensional com elementos quadráticos, apoios e carga representados de forma coerente com o esquema estático, reproduz a teoria clássica com diferenças da ordem de 1 % na flecha e de 0,1 % nas tensões fora das zonas de perturbação. A diferença maior entre MEF e Euler-Bernoulli na seção em I (4,5 %) não indica imprecisão do modelo, mas sim a limitação da própria teoria de Euler-Bernoulli, que despreza a deformação por cisalhamento. Na seção em I, a área efetiva de

cisalhamento é pequena (aproximadamente a área da alma, 1000 mm²), e a parcela de Timoshenko responde por cerca de 3,4 % da flecha total. Na seção retangular, com área de 5000 mm² e relação vão/altura igual a 40, essa parcela é de apenas 0,2 %. O resíduo de 1 % em relação a Timoshenko é compatível com a aproximação adotada para a área efetiva de cisalhamento e com a deformação local da seção sob a carga e nos apoios.

A tensão na fibra inferior do meio do vão da seção em I apresentou diferença de 3,9 % em relação a Navier, maior que a das demais seções. Essa diferença decorre da proximidade da faixa carregada: no meio do vão, a carga aplicada à mesa superior introduz tensões transversais e flexão local da mesa e da alma que se somam à flexão global. Na seção situada a 146 mm do centro, a concordância com Navier é inferior a 0,1 %, como mostrou a Figura 4. O resultado ilustra o princípio de Saint-Venant e reforça que a verificação de tensões de flexão deve ser feita fora das regiões de introdução de cargas.

Os picos de von Mises observados nos apoios (até 174 MPa na seção em T) também não devem ser interpretados como tensões de projeto. Eles resultam da representação idealizada do apoio por uma linha de nós, que concentra a reação em área nula e produz uma singularidade: quanto mais refinada a malha, maior o valor lido, como se observou entre os níveis 2 e 3. Em uma viga real, a reação é transmitida por uma placa de apoio com área finita, e a verificação local é feita por critérios próprios, como os de enrugamento e escoamento local da alma previstos na ABNT NBR 8800 (ABNT, 2008).

5.2. Aspectos de Projeto

Para o carregamento estudado, todas as vigas permaneceram em regime elástico, com tensões de flexão bem abaixo da resistência ao escoamento de aços estruturais usuais, como o ASTM A36, com $f_y = 250$ MPa. Quanto aos deslocamentos, a ABNT NBR 8800 (ABNT, 2008) indica, para vigas de piso, flecha máxima de $L/350$, que corresponde a 5,7 mm no vão de 2 m. As três seções atendem a esse limite, mas com folgas muito diferentes: a seção retangular utiliza 67 % do limite, e a seção em I, apenas 16 %. A comparação mostra que, entre seções que atendem ao estado-limite de serviço, a escolha da geometria tem impacto direto no consumo de aço e, por consequência, no custo e no peso próprio da estrutura.

Cabe observar que as seções abertas de paredes finas, especialmente o perfil em I, estão sujeitas a modos de instabilidade que a análise linear não captura, como a flambagem lateral com torção e a flambagem local de mesa e de alma (Pfeil; Pfeil, 2009). Em um projeto real, a vantagem de rigidez do perfil em I precisa ser confirmada por essas verificações, que dependem do travamento lateral e da esbeltez das chapas.

5.3. Lições de um Modelo Preliminar

Uma versão preliminar deste estudo, desenvolvida em versão educacional de um programa comercial de elementos finitos, produziu resultados incompatíveis com a teoria clássica, reproduzidos na Tabela 5. Os valores preliminares não seguem a proporcionalidade inversa com l : a razão entre as flechas das seções retangular e em I foi de 1.460, quando a razão entre os momentos de inércia é de 4,3. O registro desses resultados tem valor didático, porque ilustra erros recorrentes em trabalhos acadêmicos que empregam o MEF sem verificação.

Tabela 5. Resultados do modelo preliminar comparados com a teoria de Euler-Bernoulli e com a fórmula de Navier

Seção	δ preliminar (mm)	δ_{EB} (mm)	Razão	σ preliminar (MPa)	σ_{Navier} (MPa)
Retangular	287,9	3,81	75,6	118,5	60,0
T	0,245	2,20	0,11	75,5	99,0
I	0,197	0,88	0,22	5,1	27,8

⚠ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/analise-numerica-tridimensional-da-flexao-de-vigas-de-aco-com-diferentes-momentos-de-inercia-verificacao-por-elementos-finitos-e-comparacao-com-a-teoria-classica?noblockage>

Fonte: elaborado pelos autores (2026). Tensões preliminares correspondem ao máximo de von Mises lido no pós-processamento.

Quatro causas prováveis foram identificadas. A primeira é o uso do elemento linear com integração reduzida (C3D8R) com apenas um ou dois elementos ao longo da altura: nessas condições, os modos de ampulheta não são adequadamente controlados e a viga se comporta de forma excessivamente flexível, o que é compatível com a flecha 75 vezes maior na seção retangular (Flanagan; Belytschko, 1981; Cook *et al.*, 2002). A segunda é a aplicação da carga como força concentrada em um único nó, que gera tensões locais dependentes da malha e desloca o máximo de von Mises para o ponto de aplicação, sem relação com a tensão de flexão. A terceira é a possível inconsistência de unidades ou de magnitude da carga entre os modelos, sugerida pelo fato de as seções em T e em I terem

apresentado flechas menores que as teóricas em fatores muito diferentes (0,11 e 0,22), algo que um erro sistemático de formulação não explicaria. A quarta é o cálculo incorreto do momento de inércia da seção em T no memorial (3.208.333 mm⁴, contra 1.800.044 mm⁴ obtidos pela Equação (2)), pela omissão da parcela de transporte do teorema de Steiner.

Desses erros decorre uma recomendação prática para o uso do MEF em disciplinas de Resistência dos Materiais: antes de interpretar os resultados de qualquer modelo, calcular a flecha e a tensão por uma solução analítica simples; verificar se a razão entre resultados de modelos diferentes segue a razão prevista pela teoria; comparar a componente de tensão correspondente à grandeza teórica (σ_z , e não von Mises) em seção afastada de cargas e apoios; e repetir a análise com pelo menos dois níveis de malha. Esse roteiro, aplicado ao modelo preliminar, teria identificado as inconsistências de imediato.

5.4. Limitações

O estudo considerou comportamento elástico linear, sem plastificação, sem não linearidade geométrica e sem imperfeições iniciais, e não avaliou instabilidades locais ou globais. As seções foram idealizadas como composições de retângulos, sem os raios de concordância dos perfis laminados. A área efetiva de cisalhamento das seções em T e em I foi estimada de forma simplificada. Essas simplificações são adequadas ao objetivo de verificar a teoria da flexão simples, mas estudos futuros podem incorporar análise não linear material para avaliar o momento de plastificação, análise de flambagem para quantificar a instabilidade lateral e ensaios físicos em escala reduzida para validação experimental.

6. CONCLUSÃO

O estudo analisou a flexão de três vigas de aço com seções retangular, em T e em I, de mesma largura e mesmo vão, por meio de modelos sólidos tridimensionais com elementos quadráticos de vinte nós, e comparou os resultados com as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

O modelo numérico mostrou-se convergido e aderente à teoria clássica, com flechas que diferem menos de 1 % da solução de Timoshenko e tensões normais que reproduzem a fórmula de Navier com diferença inferior a 0,1 % em seções afastadas da carga. As maiores diferenças em relação à teoria de Euler-Bernoulli ocorreram nas seções de alma delgada e foram explicadas pela deformação por cisalhamento, e as tensões elevadas nos apoios e sob a carga foram identificadas como efeitos locais sem significado para a flexão global.

Quanto à influência da geometria, o momento de inércia governou a rigidez de forma inversamente proporcional, como prevê a teoria: a seção em I, com momento de inércia 4,3 vezes maior que o da seção retangular, apresentou flecha 4,1 vezes menor, com 44 % menos aço. A resistência à flexão, por sua vez, foi governada pelo módulo de resistência mínimo, o que explica por que a seção em T, mais rígida que a retangular, apresentou a maior tensão máxima. A distinção entre as duas propriedades, frequentemente confundida por estudantes, fica evidente na comparação.

Por fim, a análise do modelo preliminar mostrou que resultados numéricos sem verificação analítica podem conduzir a conclusões equivocadas, ainda que visualmente convincentes. Recomenda-se

que o uso do MEF em disciplinas de Resistência dos Materiais seja acompanhado de um roteiro sistemático de verificação, como o proposto neste artigo, e que os modelos e rotinas sejam disponibilizados para reprodução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8800**: projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1996.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 33, n. 2, p. 335-340, 1966. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3625046>.

DHONDT, G. **CalculiX CrunchiX user's manual**: version 2.21. [S. l.]: CalculiX, 2023. Disponível em: http://www.dhondt.de/ccx_2.21.pdf. Acesso em: 28 set. 2026.

DHONDT, G. **The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2004.

FLANAGAN, D. P.; BELYTSCHKO, T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. **International**

Journal for Numerical Methods in Engineering, [s. l.], v. 17, n. 5, p. 679-706, 1981. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620170504>.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos materiais**. Tradução da 7. ed. norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de aço**: dimensionamento prático de acordo com a NBR 8800:2008. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

SILVA, T. C. Análise das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para vigas em diferentes condições de contorno. **Engenharia Civil UM**, Guimarães, n. 62, p. 45-54, 2022. Disponível em: <https://revistas.uminho.pt/index.php/ecum/article/view/4491>. Acesso em: 24 out. 2025.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1970.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The finite element method**: its basis and fundamentals. 7. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

¹ Professor do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA. Autor para correspondência. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

² Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

³ Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA.

⁴ Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA.

⁵ Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA.

⁶ Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA.

⁷ Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

⁸ Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA.

⁹ Graduando(a) do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Imperatriz, Imperatriz, MA.