

**PROPOSTA DIDÁTICA PARA
MITIGAÇÃO DAS
DIFICULDADES
ENFRENTADAS NO
PROCESSO DE ENSINO E
APRENDIZAGEM DAS
EQUAÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS NA 11^a
CLASSE: UMA VISÃO
DOCENTE**

**A DIDACTIC PROPOSAL FOR MITIGATING DIFFICULTIES IN THE TEACHING
AND LEARNING OF TRIGONOMETRIC EQUATIONS IN THE 11TH GRADE: A
TEACHER'S PERSPECTIVE**

Ciências Exatas e da Terra, Ciências Humanas • 01/10/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/790724021](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/790724021)

Constantino Ossi Chicote¹

Gaieta Manuel Quintas²

RESUMO

Este artigo analisa as dificuldades enfrentadas no ensino e aprendizagem das equações trigonométricas, evidenciadas pelo desânimo dos agentes envolvidos nesse processo. Diante desse cenário, a investigação teve como objetivo elaborar uma proposta didática que contribua para o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem das equações trigonométricas nos alunos da 11.^a classe do Complexo Escolar Delegado Eusébio Nelson, promovendo uma aprendizagem significativa baseada no repertório cognitivo dos alunos. A pesquisa foi desenvolvida com base numa abordagem quali-quantitativa, permitindo a análise de dados relevantes. Verificou-se que a resolução de equações trigonométricas exige do aluno criatividade e domínio de diversos conteúdos da trigonometria e da matemática em geral. Nesse sentido, destaca-se o papel do professor como mediador do processo, responsável por motivar e incentivar os alunos na descoberta de diferentes estratégias de resolução. A proposta didática apresentada visa promover uma construção menos fragmentada dos conhecimentos, valorizando a participação ativa do aluno. Assim, busca-se que o estudante se torne protagonista do seu processo de aprendizagem, atuando como construtor do seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Proposta didática; Ensino e aprendizagem; Equações trigonométricas.

ABSTRACT

This study analyzes the difficulties faced in the teaching and learning of trigonometric equations, as evidenced by the discouragement of the agents involved in this process. In this context, the research aimed to develop a didactic proposal to contribute to improving the teaching and learning of trigonometric equations among 11th-grade students at Complexo Escolar

Delegado Eusébio Nelson, promoting meaningful learning based on students' cognitive repertoire. The research was conducted using a qualitative-quantitative approach, allowing for the analysis of relevant data. It was found that solving trigonometric equations requires students to demonstrate creativity and mastery of various trigonometry and general mathematics concepts. In this regard, the teacher's role as a mediator is highlighted, responsible for motivating and encouraging students to discover different solution strategies. The proposed didactic approach aims to promote a less fragmented construction of knowledge, valuing active student participation. Thus, it seeks to make students protagonists of their own learning process, acting as builders of their own knowledge.

Keywords: Didactic proposal; Teaching and learning; Trigonometric equations.

1. INTRODUÇÃO

O declive da realidade educacional tem mostrado fortes indícios que, a maioria das vezes, os conhecimentos matemáticos são tratados de forma teorizadas e descontextualizada, limitando e dificultando o envolvimento do aluno no processo de ensino e aprendizagem.

O predomínio de um ensino descontextualizado dos conhecimentos matemáticos, “é notório em qualquer nível de ensino a ênfase da memorização de identidades, fórmulas matemáticas e métodos de resolução” (Feijó, 2018).

A matemática, é uma disciplina que predispõe de instrumentos eficazes para compreender e dar respostas a fenómenos do quotidiano, pois, ela estabelece relações que nos levam à

interpretação de fenómenos e informações, isso é possível, devido a forma com que ela desenvolve e demonstra seus conceitos, argumentações, meios de generalização, relacionamento e conclusão. Daí que;

o raciocínio matemático é aplicado em situações reais a mais de Sexénio, onde pastores relacionavam cada ovelha a uma pedra para ter certeza de que seu rebanho estava completo. Mas os avanços adquiridos ao longo do tempo, principalmente nos três últimos séculos, permitem ir além das aplicações concretas (Júnior, 2015, p.179).

Nesta perspectiva, dificilmente se proporciona a construção de significados, fazendo com que os alunos compreendam que os conhecimentos matemáticos também, reduzem-se a fórmulas, a fim de serem aplicadas em determinadas situações. No entanto, é fundamental que se tenha maior atenção quando se fala no ensino da matemática, pois a disciplina é temida pela maioria dos estudantes. O facto de a matemática possuir um carácter abstracto, faz com que os alunos tenham certo receio do conteúdo e muitas vezes nem tentam compreender os conceitos abordados.

O processo de ensino e aprendizagem do conhecimento trigonométrico não se limita em estudar os ângulos e lados de um triângulo, suas aplicações se estendem a outros campos desta ciência, tais como: analisar o cálculo das equações trigonométricas matematicamente e geometricamente.

O estudo da trigonometria é pouco explorado pelos professores durante aulas, isso, faz com que os alunos não se dediquem em

estudar ainda mais, deixando várias lacunas no processo de ensino e aprendizagem. Na maioria das vezes é abordada de forma acessória, com métodos tradicionais, contemplando apenas assuntos referentes ao estudo de triângulos de forma integrada com o ensino de geometria.

Estudos preliminares realizados pelos autores desta investigação, durante o período de práticas pedagógicas no Complexo Escolar Delegado Eusébio Nelson, na 11ª Classe, comprovou-se algumas insuficiências, tais como:

- Desconhecimento de matérias das Classes precedentes e carecem de conhecimentos ou metodologias para resolução de equações trigonométricas;
- Limitações na variedade de exercícios do manual do aluno, que veiculam o desenvolvimento de habilidades, particularmente na análise de equações trigonométricas (RT) de ângulos negativos,
- Pouca aplicação das identidades trigonométricas, na caracterização do domínio de uma função trigonométrica a partir do I Ciclo.
- Insuficiências no desenvolvimento das actividades docentes, particularmente nos exercícios e na abordagem teórica/práticos referentes a este conteúdo.

A realidade constatada nesta esfera escolar suscitou a necessidade de investigar a cerca de equações trigonométricas no ensino da Matemática, para uma concepção mais integradora e reflexiva de sua didáctica, que permita potencializar o processo de

aprendizagem deste conteúdo e o desenvolvimento das habilidades que com ele se pretende desenvolver.

Isto gerou a motivação necessária para elaboração do seguinte problema: Como contribuir para aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem das equações trigonométricas nos alunos da 11ª Classe do Complexo Escolar Delegado Eusébio Nelson? Com o objectivo de responder a este problema, desenvolveu-se o seguinte objectivo: Elaborar uma proposta didáctica para contribuir no aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem das equações trigonométricas nos alunos da 11ª Classe do Complexo Escolar Delegado Eusébio Nelson.

2. REFERENCIAIS TEÓRICOS

Uma breve abordagem histórica onde o uso de métodos da trigonometria, incluindo as equações trigonométricas, ganhou destaque, diz respeito a um desafio lançado, no ano de 1593, por um matemático e médico belga chamado Adriaan Van Roomen, ao Rei da França Henrique IV. Tal desafio consistia em resolver uma equação algébrica que segundo Roomen, ninguém da França conseguiria resolvê-la e para defender a honra do país, o rei convocou ninguém menos que François Vietè, um advogado e administrador público apaixonado por matemática. Segundo De Andrade (2018), em 1593, Adrian Van Roomen, professor de Matemática e Medicina na Bélgica, publicou um trabalho intitulado *Ideae Mathematicae*, que continha, entre outros problemas propostos, algo bastante desafiador: uma equação de grau 45 que em notação atual, pode ser escrita na seguinte forma:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + 111150x^{37} - 740259x^{35} + 3764565x^{33}$$

$$+14945040x^{31} + 46955700x^{29} - 117679100x^{27}$$

$$+236030652x^{25} - 378658800x^{23} + 483841800x^{21} - 488494125x^{19}$$

$$+384942375x^{17} - 232676280x^{15} + 105306075x^{13} - 34512075x^{11}$$

$$+7811375x^9 - 138500x^7 + 95634x^5 - 3795x^3 + 45x = A$$

$$\text{Sendo: } A = \sqrt{\frac{7}{4}} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8}} - \sqrt{\frac{45}{64}}$$

Na época, o embaixador belga apresentou esse problema a Henrique IV, rei da França, e chegou a dizer que ninguém do país conseguiria resolvê-lo. O rei convocou os franceses para “*salvarem a honra da nação*” e foi então que François Viète (1540-1603) entrou nessa história.

Viète observou que essa equação, proposta por Roomen, poderia ser obtida por meio da utilização de fórmulas do seno do múltiplo de um arco, e obteve muitas das suas raízes.

Um trabalho realizado por Campos (2017) apresenta o modo como Viète, recorrendo a processos algébricos, determinou as soluções da equação de Van Roomen.

$$\text{Considere-se: } A = 2 \operatorname{sen}(45\theta)$$

Sabe-se que: $\operatorname{sen}(3\alpha) = 3 \operatorname{sen}\alpha - 4(\operatorname{sen}\alpha)^3$, é válida para qualquer $\alpha \in R$.

$$\text{Se } \alpha = 15\theta \text{ obten-se } \operatorname{sen}(45\theta) = 3 \operatorname{sen}15\theta - 4(\operatorname{sen}15\theta)^3$$

$$\text{Considera – se } y = 2\operatorname{sen}(15\theta)$$

$$2\operatorname{sen}(45\theta) = 3y - y^3 \iff A = 3y - y^3 \quad (I)$$

Se $\alpha = 5\theta$ obtém-se $\sin(15\theta) = 3\sin 5\theta - 4(\sin 5\theta)^3$

Considere $y = 3z - z^3$ se $z = 2\sin(5\theta)$ então
 $2\sin(15\theta) = 3z - z^3 \iff y = 3z - z^3$ (2)

Sabe-se que:
 $\sin(5\theta) = 5\sin\theta - 20(\sin\theta)^3 + 16(\sin\theta)^5 \iff \frac{1}{16}\sin(5\theta) - \frac{5}{16}\sin(\theta) + \frac{5}{4}(\sin\theta)^3$

Considere $x = 2\sin\theta$, então:
 $\frac{1}{32}x^5 = \frac{1}{32}z - \frac{5}{32}x + \frac{5}{32}x^3 \iff x^5 - 5x^3 + 5x = z$ (3)

Substituindo 3 em 2 e 2 em 1, obtem-se:

$$A = 3y - y^3 = 3(3z - z^3)^3 - (3z - z^3)^3 = 3[3(x^5 - 5x^3 + 5x) - (x^5 - 5x^3 + 5x)^3] - [3(x^5 - 5x^3 + 5x) - (x^5 - 5x^3 + 5x)^3]^3 = x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + \dots + 95634x^5 - 3795x^3 + 45x.$$

Desta forma, Viète decompôs a equação inicial de grau 45 em três equações mais simples: duas de grau 3 e uma de grau 5. Observe-se que $45 = 3 \cdot 3 \cdot 9$. As soluções da equação são obtidas pela igualdade:

$$x_k = 2 \sin \left(\theta + \frac{2k\pi}{45} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, 44\}$$

Solução esta que surgiu a partir de cálculos algébricos que foram realizados através da resolução de uma equação trigonométrica. Dessa forma, todas as raízes podem ser calculadas e Viète foi o primeiro matemático a fazer uso significativo de métodos algébricos na trigonometria. Sua solução foi apresentada no trabalho intitulado Responsum, em 1595 e com isso, acabara-se a disputa para resolver

esse problema, e Van Roomen chegou até a viajar para a França para conhecer Viète pessoalmente.

Ainda em relação aos estudos de Roomen quanto à trigonometria, podemos dar destaque à construção de tabelas trigonométricas com a medida mais precisa de ângulos que certamente contribuiu de maneira significativa para as diversas ciências como, por exemplo a astronomia, a astrologia, as navegações, na matemática para o cálculo de ângulos nas equações trigonométricas surgindo em problemas envolvendo fenômenos da natureza, dentre outras ciências.

Segundo um estudo realizado por Gonçalves e Oliveira (2007), citam que Roomen possuía um colega chamado Christoph Clavius, com o qual costumava comunicar-se através de cartas que continham assuntos da ordem técnica da matemática, como a quadratura do círculo e a construção de tabelas trigonométricas.

Christoph Clavius era influente padre jesuíta que participou da elaboração do calendário gregoriano, além disso, foi uma forte presença no Colégio Romano, onde actuou como professor desde 1565 até sua morte, em 1612. De sua atividade como professor, surgiram livros-texto, em especial o Comentário sobre os Elementos de Euclides e o Comentário sobre a Esfera de Sacrobosco, que influenciaram profundamente as gerações seguintes de matemáticos e astrônomos.

Os autores realizaram um estudo sobre as cartas e verificaram que Van Roomen dedicou uma parte considerável de sua correspondência com Clavius aos seus estudos de trigonometria. Ele também cita George Joachim Rheticus (1514-1574) e o padre

Christoph Grienberger, matemáticos desse período notadamente dedicados à construção de tabelas trigonométricas. Na primeira carta de que se tem notícia que Van Roomen enviou a Clavius, em 11 de maio de 1592, ele já estava trabalhando na construção de tabelas de senos, não para encontrar um método de construção, mas somente pelo exercício matemático. A carta sem data, mas que provavelmente foi enviada no ano de 1601 para Clavius, trata exclusivamente dos cálculos de senos, tangentes e secantes de Rheticus e Grienberger. Apresenta também uma “Regra universal necessária para evitar erros nos cálculos de tangentes e secantes.”

Hoje, o seno é usualmente considerado como uma função de uma variável, enquanto nos séculos XVI e XVII era tratado como dependendo de duas variáveis. Isso acontecia porque o raio utilizado nas circunferências trigonométricas não era unitário, como usamos atualmente, mas podia assumir diversos valores na forma 10^r , com r natural. Na carta de 11 de maio de 1582, por exemplo, van Roomen menciona que estava construindo tabelas com raios de 10^{16} .

De acordo com Gonçalves e Oliveira (2007), em notação moderna, se indicarmos por $\text{Senr } x$ o seno de um arco de medida x em relação a uma circunferência de raio 10^r , Podemos escrever;

$$\text{Senr } x = \text{sen } x \cdot 10^r$$

Essa igualdade relaciona, portanto, um valor de seno do ponto de vista dos séculos XVI e XVII com um valor de seno do ponto de vista atual. As expressões seno total (sinus totus) e raio total (radius totus), que os matemáticos daquele período utilizavam, referem-se ao seno de 90 graus, pois este tem a mesma medida que o raio da circunferência.

O seno total é representado pela potência 10^r , e cada estudioso, em princípio, utilizava o raio que achasse melhor para seus cálculos. Porém, segundo van Roomen, o tamanho desse raio não era tão livremente escolhido, pois essa escolha depende de quantas casas decimais são requeridas nos resultados.

A função cosseno não aparece comumente sob este nome naquele período. Quando necessário, fazia-se referência ao seno do complemento do ângulo dado. Naquele período, as funções tangentes e secantes são normalmente indicadas com esses nomes. As medidas dos senos do complemento, tangentes e secantes também eram calculadas em relação ao seno total, ou seja, em relação ao raio da circunferência dada. Assim;

$$\text{Senr } (90^0 - x) = \text{sen } (90^0 - x) \cdot 10^r = \cos x \cdot 10^r$$

$$\text{tgr } x = \tan x \cdot 10^r$$

$$\text{Secr } x = \sec x \cdot 10^r$$

No século XVI, muitos matemáticos trabalharam exaustivamente na construção de tabelas trigonométricas. Van Roomen, em 1592, na carta que enviou para Clavius, trabalhara muito com cálculos trigonométricos. Em 1593, na sua obra *Idae mathematicae pars prima*, traz os cálculos de lados de polígonos regulares de 3, 4, 5 e 15 lados, bem como dos polígonos obtidos a partir desses por sucessivas duplicações do número de lados, inscritos e circunscritos em uma circunferência de raio 1028 (Gonçalves e Oliveira, 2007, p.158).

Especial a esse respeito é a carta sem data, mas possivelmente enviada em 160, na qual a construção de tais tabelas é o único tema

tratado. Essa carta pode ser dividida em três partes: inicia-se com uma censura às tabelas de Grienberger; em seguida, apresenta conselhos e regras para evitar erros na construção de tais tabelas; e, por fim, apresenta uma segunda censura, mas desta vez às tabelas de Rheticus.

Na primeira parte, Van Roomen escreve sobre um conjunto de tabelas trigonométricas que Grienberger estava construindo: uma tabela de senos, que servia também para os senos dos complementos (nosso cosseno); uma tabela de secantes e uma de tangentes. Tanto a tabela de secantes com a de tangentes eram obtidas a partir da tabela de senos, através, respectivamente, das seguintes relações:

$$\text{Secr } x = 10^{2r} / \text{Senr } (90^0 - x)$$

$$\text{Tgr } x = 10^r \cdot \text{Senr } x / \text{Senr } (90^0 - x)$$

Na carta de van Roomen, Gonçalves e Oliveira (2007) são informados que a tabela de senos de Grienberger apresentava os valores com 16 casas decimais, isto é, tratava-se de uma tabela em relação a um raio total igual a 10^{16} . Suas tabelas de secantes e tangentes, por outro lado, estavam sendo construídas para apresentar valores com 12 casas decimais, isto é, em relação a um raio total igual a 1012. Van Roomen, em sua censura, alerta Grienberger para o fato que é impossível, para alguns arcos, obter 12 casas decimais significativas para secantes e tangentes a partir de apenas 16 casas significativas de valores de senos. Segundo van Roomen, para que as tabelas de tangentes e secantes fossem exatas, seria preciso um aumento de oito dígitos na tabelas de senos, ou seja, para se construir as tabelas de tangentes e secantes desejadas seria necessária uma tabela de

senos com 24 casas decimais. A partir dessa observação, van Roomen apresenta diversos conselhos para sanar os problemas das tabelas.

O mais importante desses conselhos é apresentado na segunda parte dessa carta, sob o título *Regra universal necessária para evitar erros nos cálculos de tangentes e secantes*. É esse talvez um dos mais sofisticados resultados de Adriaan van Roomen, em que ele estipula o exato número de casas que devem ser aumentadas em um valor individual de seno ou cosseno, a fim de se obter a secante e a tangente de um arco. Logo em seguida, van Roomen mostra uma tabela com uma explicação sobre o funcionamento da regra e, por último, apresenta dois corolários obtidos a partir da dita regra.

A regra é intrincada, e seu enunciado requereria uma explicação que levaria este artigo para bem além dos limites desejados. Um exemplo, contudo, pode ser esclarecedor. Em relação ao raio total 10^{10} , tomemos o valor de seno de 1 minuto de grau, isto é $\text{sen } (1')$. Em uma tabela trigonométrica típica do século XVI, esse valor seria o número inteiro:

$$\text{Sen}_{10} (1') = \text{sen } (1') \cdot 10^{10} = 2908882$$

A secante do arco do complemento de $1'$, ou seja, a secante do arco de medida $89^\circ 59'$ pode ser calculada a partir do valor acima como

$$\text{Sec}_{10} (89^\circ 59') = 10^{20} / 2908882 = 34377468731973$$

O problema que surge dessa situação, como van Roomen percebeu, é que o valor da secante obtida a partir do seno de $1'$ calculado acima é diferente da melhor aproximação inteira para o valor dessa secante:

$$\sec_{10} (89^\circ 59') = 10^{10} \cdot \sec (89^\circ 59') = 34377468192663$$

Assim, de fato, um valor de seno em relação ao raio total 10^{10} , por mais exato que seja, não pode dar o valor da secante com todas as casas decimais corretas. A Regra universal necessária para evitar erros nos cálculos de tangentes e secantes provê um modo de sanar esse problema. Na terceira e última parte dessa carta, Van Roomen escreve uma censura às tabelas de Rheticus, dividida em três proposições, das quais, entretanto, somente duas sobreviveram.

As duas proposições remanescentes referem-se aos erros cometidos por Rheticus na construção de suas tabelas de tangentes e secantes, na mesma linha dos erros de Grienberger.

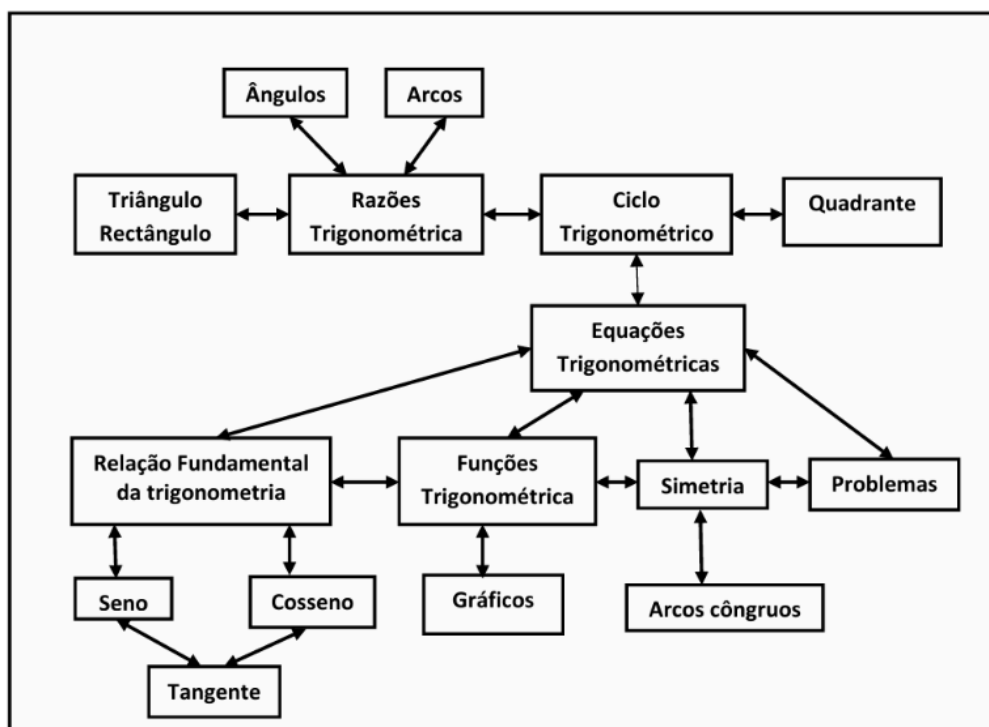
Por fim, podemos perceber que há muito tempo os conceitos trigonométricos, de forma geral, incluindo as equações trigonométricas, eram desenvolvidos para a resolução de problemas não só de uma matemática mais técnica, mas na resolução de problemas para o cálculo de ângulos que foram necessários para a confecção das tabelas trigonométricas que conhecemos na atualidade e que certamente ainda auxiliam em situações do cotidiano que surgem nas outras ciências como a física, a astronomia, as navegações, dentre outras.

2.1. Mapa conceitual

Nesta subseção é apresentado o mapa conceitual que estrutura os assuntos que estão interligados para o ensino de equações trigonométricas. Este recurso foi construído para fornecer uma base e entender como se organiza a estrutura do assunto em questão com alguns tópicos necessários para sua aprendizagem, que

auxiliaram para a construção da Sequência Didática que foi proposta neste trabalho.

Figura 1. Mapa conceitual das equações Trigonométricas.



Fonte: Produção do Autor, 2026.

2.2. Aspectos Curriculares das equações trigonométricas

Quando abordamos as equações trigonométricas, vale destacar que este é um conteúdo da trigonometria que tem caído em desuso em grande parte das escolas públicas ao nível de Angola. Portanto, nesta subseção será apresentado um texto referente ao processo de ensino e aprendizagem que trata sobre o ensino da trigonometria que nos dará suporte para entendermos melhor o porquê do não cumprimento deste conteúdo no desenho curricular de grande parte das escolas públicas.

Durante a selecção de conteúdos devem ser privilegiados aqueles que possam ser utilizados como instrumentos teórico-práticos, capazes de orientar a tomada de decisões nos diferentes problemas

da vida profissional e social. Nesse processo, entretanto, é fundamental realizar uma escolha que, por incorporar conteúdos científicos, universais e amplos, evite o empobrecimento da formação.

A palavra currículo é usada em diferentes contextos e com diversificados significados, dentre as muitas semânticas sobre currículo, nesse trabalho elegeu-se a formulada por D´Ambrósio (2009), segundo a qual, currículo é uma estratégia para a acção educativa que envolve um conjunto de orientações sobre o Ensino em um determinado nível, onde se contemplam, de um modo geral, objectivos, conteúdos, metodologias, materiais e formas de avaliação.

Assim um currículo de Matemática, deve privilegiar um modo mais eficaz de ensinar/aprender Matemática, em que os alunos aprendem factos, conceitos, princípios, destrezas, processos de raciocínio e estratégias de resolução de problemas. Um currículo tem que estar voltado aos interesses e necessidades dos alunos.

Segundo Pacheco (2015), o professor não deve ser “apenas o operário do currículo, mas também um dos seus arquitectos”. Assim é necessário o professor ter uma atitude investigativa, criativa, crítica e reflexiva do seu próprio trabalho, para poder imprimir nos currículos uma retroalimentação sempre que necessário.

De acordo com a Lei 32/20, de 12 de Agosto Lei de bases do sistema de educação, no seu artigo 33º, são objectivos específicos do II Ciclo do ensino Secundário Geral seguinte:

1. a) Assegurar uma formação sólida e aprofundada numa determinada área de conhecimento e numa das principais

línguas de comunicação internacional;

2. b) Preparar o aluno de modo a permitir que, logo após a conclusão do ciclo, esteja qualificado e capacitado para ingressar directamente no ensino superior.

Assim sendo faz-se necessário o fortalecimento do tema Equações Trigonométricas fundamentais, nos programas e manuais da 11ª classe, dado que constitui requisito base para a compreensão dos conteúdos ministrados nos cursos de Ciências Exactas nos ISCED´s e em alguns cursos de engenharia. De modo assegurar uma sólida preparação científica, há uma necessidade extrema de reforçar os manuais de Matemática e consequentemente redefinição de alguns objectivos, visto que um dos objectivos da educação é: formar um indivíduo capaz de compreender os problemas nacionais, regionais e internacionais de forma crítica e construtiva para a sua participação activa na vida social, à luz dos princípios democráticos (lei 32/20, artigo 3º alínea b).

De acordo com um estudo realizado por Pereira (2013) sobre o ensino da trigonometria no ensino médio, foi verificado que os docentes de matemática que actuam neste nível da educação, têm carência de um aprofundamento histórico da trigonometria. Tais dificuldades foram atribuídas a diversos motivos, dentre eles, a grade curricular que possuía um conteúdo programático de trigonometria muito extenso, a falta de afinidade dos professores com o assunto, seu desenvolvimento histórico e suas aplicações contemporâneas em diversas áreas do conhecimento humano, estes fatos provenientes de estudos de trigonometria na educação básica.

Ainda, segundo o autor, a construção do conhecimento matemático apoia-se sobre suas raízes relacionando às práticas do dia-a-dia e constitui estratégias que visam facilitar a compreensão dos conteúdos estudados. Também, considera relevante a abordagem pedagógica, a reflexão e a interpretação das origens dos factos históricos da matemática, pois leva o aluno a situar-se no tempo e no contexto social em que vivem, ajuda a criar ligações entre os diferentes conhecimentos matemáticos, além de lidar com situações novas e com as difíceis estratégias de ação, possibilitando uma aprendizagem significativa.

Compartilhando ainda das ideias de Pereira (2013), o autor ainda apontou outros fatores desfavoráveis como a metodologia tradicional, com o uso excessivo do cálculo, a exploração insuficiente de novos recursos pedagógicos, a falta de contextualização e da linguagem matemática conectadas com a realidade dos alunos, além disso, a situação ainda se agrava nas aulas noturnas.

Na seção a seguir, é descrita a quarta fase da fundamentação teórica, que na perspectiva dos livros didáticos do ensino em Angola aborda sobre as equações trigonométricas.

2.3. Abordagem do Conceito das Equações Trigonométricas em Livros Didáticos do Ensino Médio.

Nesta subseção faz-se uma breve abordagem da apresentação do conteúdo de equações trigonométricas em livros didáticos do ensino médio, considerando nossa proposta de estimular desenvolver atividades que facilitem a compreensão das equações do tipo seno, cosseno e tangente.

Dentro deste contexto, tem-se como objetivo, verificar se esses livros didáticos estão adequados aos objectivos do MED e se estão abordando o assunto de equações trigonométricas com metodologias diferenciadas para o ensino e observar se existem atividades que possibilitem ao aluno a compreensão dos conteúdos. Neste sentido, abordamos como o conteúdo de equações trigonométricas se apresenta em três livros do subsistema de ensino, utilizados para ensinar conteúdos matemáticos nas escolas públicas de Angola, dentre eles, o conteúdo de equações trigonométricas. Estes livros são: “Matemática 10” da autora Trindade (2010) e “Matemática 11” da autora Maria Teresinha Tomás (2006).

Na análise do livro “Matemática 10ª classe” de Trindade (2010); verificou-se que o livro foi dividido em cinco capítulos, nestes, o conteúdo relacionado ao tratamento do ensino da trigonometria encontra-se no quarto capítulo.

A primeira parte deste capítulo (quarto capítulo) realiza uma abordagem completa sobre os estudos das razões trigonométricas de triângulo retângulo. Em seguida a autora faz uma abordagem sobre a formalização do estudo das funções seno e cosseno de ângulos obtusos e nem se quer cita sobre a tangente deste ângulo. Na parte final do assunto de trigonometria, a autora trata sobre conceitos trigonométricos na circunferência trigonométrica, além disso, discorre sobre as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, fazendo um hiperligação com as funções senoides e os fenômenos periódicos sem antes abordar de forma precisa das identidades trigonométricas.

Se tratando do assunto equações trigonométricas, a obra, no capítulo intitulado “Matemática 10ª Classe” faz uma abordagem

sobre as equações $\text{sen } x = \text{sen} \alpha$, $\text{cos } x = \text{cos} \alpha$ e $\text{tg } x = \text{tg} \alpha$. Neste capítulo a autora mostra a resolução de cada tipo de equação trigonométrica apontando o conjunto solução geral.

Uma curiosidade que nos chamou atenção foi de que em nenhum momento a autora apresenta algum conceito teórico e genérico de equação trigonométrica, tão pouco aborda um tópico voltado a atividades para os estudantes praticarem seus conhecimentos sobre o assunto. Acreditamos que pelo fato do MED não apresentar de forma direta as suas competências específicas na área de equações trigonométricas, alguns autores estão deixando de tratar sobre o assunto nos livros didáticos.

Na obra intitulada “Matemática 11ª Classe” da autora Maria Teresinha Tomás (2006), contendo seis temas. A autora destina o primeiro capítulo da obra à trigonometria, onde a autora trata das funções trigonométricas, existe um tópico onde há uma breve abordagem de equações trigonométricas. Quanto ao ensino das equações trigonométricas, a autora descreve: “as equações trigonométricas têm infinitas soluções, representadas de forma genérica. E que quando um arco está limitado a um intervalo dado, atribuímos a k valores inteiros, determinando as soluções que satisfazem a equação. Logo em seguida, mostra os casos particulares das equações seno, cosseno e tangente, e três situações problemas de equações trigonométrica onde sua resolução necessita do domínio dos ângulos notáveis.

Na última seção que traz atividades complementares, os autores trazem treze questões de vestibular, sendo dez de equações trigonométricas que puderam ser apresentados de forma contextualizada. Pelo fato de o assunto ter sido apresentado de

forma muito breve, não conseguimos identificar atividades com metodologias diferenciadas para o aprendizado dos estudantes.

Neste tópico o autor apresenta um exemplo resolvido sobre o assunto, além disso, traz na seção de atividades para os alunos uma sequência de três questões diretas e mais três envolvendo situações contextualizadas. Em nossas análises, percebemos que o assunto está sendo exposto de forma muito breve e com um número de atividades bem reduzido, além disso, não propõe atividades que instiguem os alunos a realizarem investigações que os ajudem a tirar suas conclusões sobre o aprendizado das equações trigonométricas.

Dessa forma, conseguimos identificar uma obra que estimulasse os estudantes para trabalhar e apresentar seu raciocínio para a atividade proposta. Mesmo assim, ainda notamos a ausência de mais exercícios contextualizados para o ensino de equações trigonométricas.

Tabela 1. Introdução do conceito das equações trigonométricas.

Código	Título do livro	Autores do livro	Edição	Editora	Ano
liv.1	Matemática a 10ª Classe	Fernanda M. Pereira da Trindade	1ª	Edições Reditep	2010
liv.2	Matemática a 11ª Classe	Maria Teresinha Tomás	1ª	Texto Editores, Lda.	2004

⚠ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/proposta-didatica-para-mitigacao-das-dificuldades-enfrentandas-no-processo-de-ensino-e->

Fonte: Elaboração própria dos autores, 2026.

3. PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

Em função dos resultados obtidos no inquérito aplicado aos alunos e professores, surge a necessidade de se elaborar uma proposta didáctica para o tratamento deste estudo, que se propõe como solução de problema levantado. A proposta está constituída por um sistema de actividades planificadas e organizadas, no qual inclui um conjunto de ações com vista a desenvolver o processo de ensino e aprendizagem do estudo das equações trigonométricas.

A proposta tem como objectivo apresentar novos enfoques no processo de ensino e aprendizagem das equações trigonométricas, como uma forma de orientar e incentivar aos professores a utilizarem conhecimentos das identidades trigonométricas e redução de ângulos, porque sem esses conhecimentos anteriores o coeficiente de dificuldade certamente será maior.

Segundo Caldeira (2009), “explicitar objectivos educativos é identificar as intenções que se pretendem atingir com o acto educativo”. Assim sendo, com este trabalho pretende-se:

- Propor metodologias que facilitem no processo de ensino e aprendizagem das equações trigonométricas fundamentais na 11ª Classe;

- Contribuir para minorar as dificuldades e limitações que se enfrentam durante o processo de Ensino e aprendizagem das Equações Trigonométricas.

3.1. Definição de equação trigonométrica

Equações trigonométricas são igualdades que envolvem uma ou mais razões Trigonométricas de arcos incógnitos.

Exemplos:

a. $\sin x = 1$

b. $\cos x = 0$

c. $\sin x - \cos x = 0$

Resolver uma equação trigonométrica significa determinar o conjunto de valores dos arcos, para os quais essa equação se transforma numa igualdade verdadeira. Para resolvermos equações trigonométricas, devemos determinar o conjunto de arcos trigonométricos estabelecidos para cada tipo de equação. Uma equação trigonométrica pode admitir infinitas soluções no campo dos números reais. Desta forma, todos os arcos côngruos àquele(s) determinado(s) também serão soluções da referida equação.

3.2. Soluções particulares

Na resolução de Equações Trigonométricas, podemos obter soluções particulares. Para isso, basta estabelecer intervalos dentro dos quais essas soluções são verdadeiras.

As soluções particulares podem ser obtidas a partir da solução geral, bastando para isso atribuir valores a k ($k \in \mathbb{Z}$) e verificar se a solução pertence ao intervalo considerado. Na verdade, não há um processo único para resolver todas as Equações Trigonométricas. Diante disso procuramos reduzi-las as equações mais simples, do Tipo $\text{sen } x = a$, $\text{cos } x = a$ e $\text{tg } x = a$ denominadas equações fundamentais, as quais passaremos a estudar.

Observação: quando não se fizer menção do intervalo a ser considerado, admite-se como tal, o conjunto $\mathbb{R}$.

3.3. Relações Entre as Razões Trigonométricas

Não serão apresentadas as deduções das fórmulas que se seguem, porque foge do escopo deste trabalho, em virtude da necessidade do conhecimento das mesmas para a compreensão dos exercícios aqui presentes faz-se constar neste trabalho.

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \text{ ou } \text{tg } x = \frac{1}{\text{cot } x}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} \text{ ou } \text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

- **Relação fundamental**

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

- **Relações derivadas**

$$\text{sec}^2 x = 1 + \text{tan}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$$

- **Arcos complementares**

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ válida para } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ válida para } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- **Arcos suplementares**

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

- **Fórmula da Adição e subtração de arcos**

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

- **Fórmulas do arco duplo**

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \text{ ou } \operatorname{sen} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \text{ ou } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{ ou } \cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

- **Fórmulas do arco triplo**

$$\operatorname{Sen} x = a$$

- **Fórmula do arco metade**

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \text{ ou } \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \text{ ou } \cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \text{ ou } \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$$

- **Fórmula de transformação de soma ou diferença em produto**

$$\operatorname{Sen} x = a$$

3.4. Equações Fundamentais do Tipo $\operatorname{Sen} x = a$

A equação $\operatorname{sen} x = a$ apenas terá solução se $-1 \leq a \leq 1$.

Na forma geral de solução $x = (-1)^k \cdot \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ presente na tabela anterior está implícita a propriedade: se dois arcos têm senos iguais, então eles são côngruos ou são suplementares.

Tabela 4. Casos particulares de equações trigonométricas $\operatorname{sen} x$ mais sensíveis.

Equação	Solução
$\operatorname{sen} x = 0$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen } x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\text{sen } x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Fonte: Elaboração própria do autor, 2024.

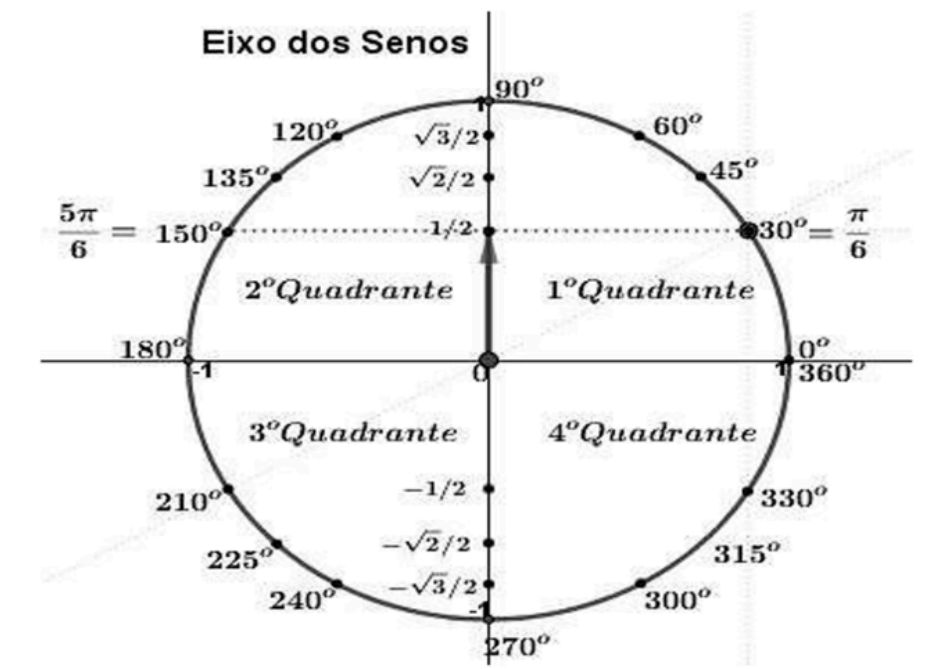
Exercícios resolvidos:

Resolver as seguintes equações:

1. a) $2 \text{sen } x = 1$

Resolução:

Figura 2. Círculo trigonométrico da equação seno.



Fonte: Mangas, 2014.

Uma solução imediata de $2 \text{sen } x = 1$ é $x = \frac{\pi}{6}$, pois $\text{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Portanto, o conjunto solução da equação $2 \text{sen } x = 1$ é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

1. b) $2 \text{sen}(x - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$

Solução:

3.5. Equações Fundamentais do Tipo $\cos x = a$

3.5. Equações Fundamentais do Tipo $\cos x = a$

3.5. Equações Fundamentais do Tipo $\cos x = a$

Fazendo $k = 0$, temos $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

Fazendo $k = 1$, temos $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

Portanto: $S = \{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

1. c) $\sin 3x = \sin x$, no intervalo $[0, 2\pi]$

Solução:

$\sin 3x = \sin x$, substituindo a forma geral de solução para a equação $\sin x = a$, presente na tabela 1, tem-se:

3.5. Equações Fundamentais do Tipo $\cos x = a$

Fazendo $k = 0$, temos $x = \frac{x}{3} \rightarrow 3x = x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

Fazendo $k = 1$, temos $x = -\frac{x}{3} + \pi \rightarrow 3x = -x + 3\pi \rightarrow 4x = 3\pi \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$.

Portanto: $S = \{0, \frac{3\pi}{4}\}$

3.5. Equações Fundamentais do Tipo $\cos x = a$

A equação $\cos x = a$, tem solução somente se $-1 \leq a \leq 1$.

A forma de solução $x = \pm \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ escrita na tabela anterior, cumpre com a propriedade: se dois arcos têm cossenos iguais, então eles são cômruos ou replementares.

Tabela 5. Casos particulares de equações trigonométricas $\cos x = a$ mais sensíves.

Equação	Solução
$\cos X = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos X = 1$	$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos X = -1$	$x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Fonte: Elaboração própria do autor, 2024.

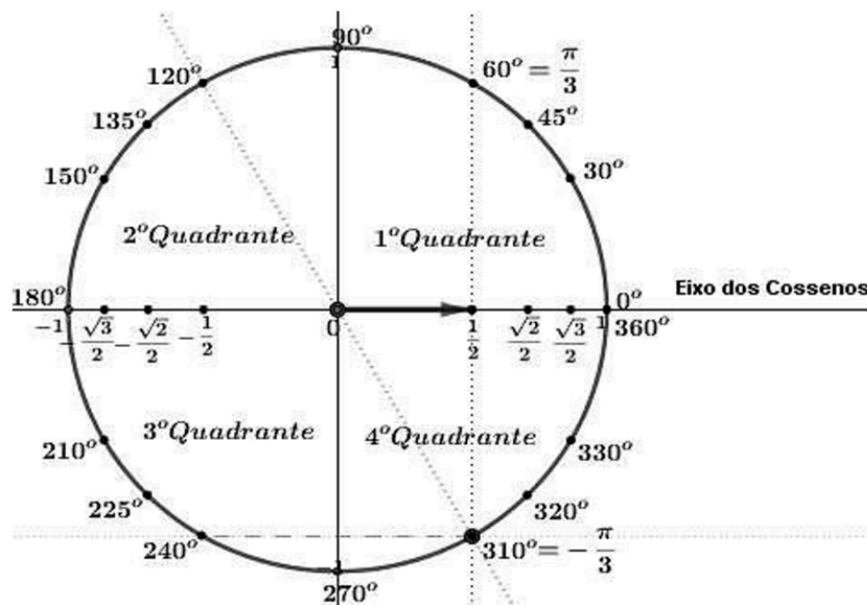
Exercícios resolvidos:

Resolver as seguintes equações:

1. a) $\cos x = \frac{1}{2}$

Solução:

Figura 3. Círculo trigonométrico da equação cosseno.



Fonte: Mangas, 2014.

Uma solução imediata $\cos x = \frac{1}{2}$ é $x = \frac{\pi}{3}$ pois $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Portanto, o conjunto solução da equação $\cos x = \frac{1}{2}$ é dado por:
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

1. b) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$

Solução:

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \rightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo $k = 0$, temos $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$. Portanto: $S = \{\frac{5\pi}{3}\}$

1. c) $2 \cos(x - \pi) = 1$, no intervalo $[0, 2\pi]$

Solução:

$$2 \cos(x - \pi) = 1 \rightarrow \cos(x - \pi) = \frac{1}{2}$$

$$x - \pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = +\frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi,$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo, Fazendo $k = 0$, nas duas expressões anteriores obtem-se respectivamente $x = \frac{2\pi}{3}$ e $x = \frac{4\pi}{3}$. Portanto: $S = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$

3.6. Equações fundamentais do tipo $\operatorname{tg} x = a$

A equação $\operatorname{tg} x = a$, tem solução para todo $a \in \mathbb{R}$.

Os valores de x , tais que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, que satisfazem essa equação podem ser obtidos a partir da fórmula $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Que cumpre com a propriedade de dois arcos têm tangentes iguais, então eles são congruos ou são explementares.

Tabela 6. Casos particulares de equações trigonométricas $\operatorname{tg} x = a$ mais sensíves.

Equação	Solução
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Fonte: Elaboração própria do autor, 2024.

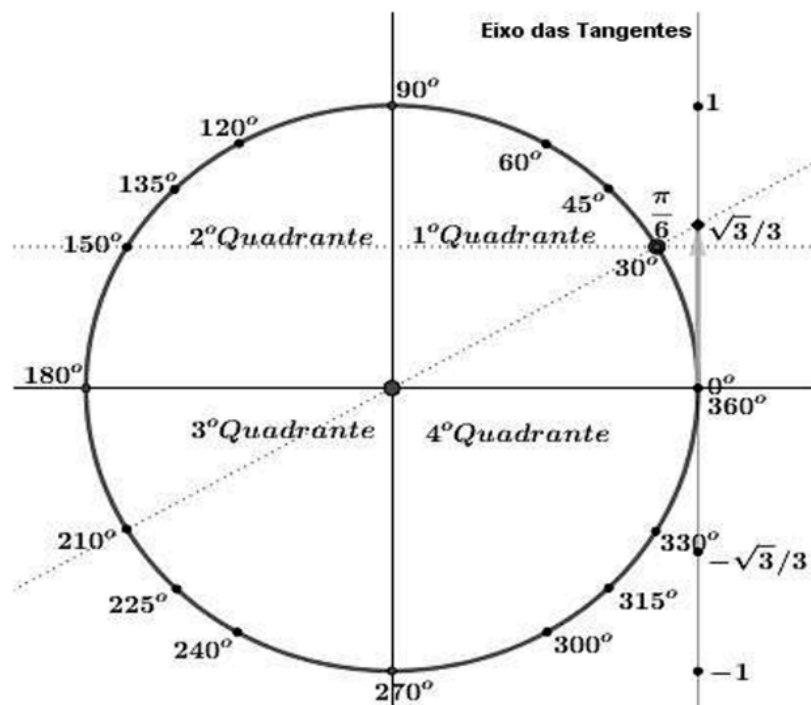
Exercícios resolvidos:

Resolver as seguintes equações:

1. a) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Solução:

Figura 4. Círculo trigonométrico da equação tangente.



Uma solução imediata $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ é $x = \frac{\pi}{6}$ pois $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Portanto, o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ é dado por: $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

1. b) $\sqrt{2} \operatorname{tg} 2x = \sqrt{2}$, no intervalo de $[0, 2\pi]$

Solução:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo $k = 0$, temos $x = \frac{\pi}{8}$

Fazendo $k = 1$, temos $x = \frac{5\pi}{8}$

Fazendo $k = 2$, temos $x = \frac{9\pi}{8}$

Fazendo $k = 3$, temos $x = \frac{13\pi}{8}$

Portanto: $S = \{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\}$

1. c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$

Solução:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo, $k = 0$, temos: $x = \frac{5\pi}{6}$. Portanto: $S = \{\frac{5\pi}{6}\}$

Equações Trigonométricas do tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = C$

Chama-se equação trigonométrica do tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = C$, a uma equação trigonométrica, definida por uma expressão racional de $\operatorname{sen} x, \cos x$ e constantes com a ajuda da adição, subtração, multiplicação ou divisão. As equações trigonométricas do tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = C$, dividem-se em:

- **Equações que se reduzem a Quadráticas**

Existem equações trigonométricas que desenvolvidas convenientemente podem ser

reduzidas a equações do 2º grau, em $\operatorname{sen} x, \cos x$ ou $\operatorname{tg} x$.

- **Algoritmos de resolução**

Se $\operatorname{sen} x$ entra na equação com expoentes pares, substitui-se $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ e se obtém uma equação racional com relação a $\cos x$. Do mesmo modo, se $\cos x$ entra na equação com expoentes pares, substitui-se $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ conduz a que a equação seja racional em relação a $\operatorname{sen} x$. Para os casos em que não aparece

$\text{sen}x$ ou $\cos x$, com expoente par, faz-se uma substituição conveniente, em função da criatividade do indivíduo.

Para estes casos em que a equação se transforma numa equação quadrática, para sua resolução emprega-se o método da variável auxiliar.

Exercício resolvido:

Resolver a seguinte equação:

$$1. a) 3\text{sen}x = 2\cos^2 x$$

Solução:

$$3\text{sen}x = 2\cos^2 x$$

Como $\cos x$ entra na equação com expoente par, substitui-se $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$ porque $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, assim tem-se:

$$3\text{sen}x = 2\cos^2 x \rightarrow 3\text{sen}x = 2(1 - \text{sen}^2 x)$$

$$3\text{sen}x = 2 - 2\text{sen}^2 x \rightarrow 2\text{sen}^2 x + 3\text{sen}x - 2 = 0$$

Empregando o método da variável auxiliar fazendo $\text{sen}x = y$, como $-1 \leq y \leq 1$, obtem-se:

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara (fórmula resolvente das equações do 2º grau),

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\text{Assim tem-se: } \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \rightarrow \Delta = 25$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \rightarrow y = \frac{-3 \pm 5}{4} \leftrightarrow y = \frac{-3+5}{4} \vee y = \frac{-3-5}{4}$$

$$y = -2 \vee y = \frac{1}{2}$$

Note que $y = -2$, não satisfaz a condição dada a y

Retornando a equação $\sin x = y$ para determinar a variável x .

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}(-1)^k + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Portanto: } S = \{ \forall x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6}(-1)^k + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

Exercícios propostos

Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$.

a. $\cos 2x = \sin x$

b. $3\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

c. $\sqrt{3}\cos \sec^2 x + 2\cos \sec x = 0$

d. $5(\tan^2 x - 2) = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}$

e. $\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

f. $2\cot g x = \cos \sec^2 x$

g. $\cot g^2 x + \cos \sec x = 1$

Equações do tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$

A equação $a*\sen x + b*\cos x = c$, sendo a , b e c números reais, representa o caso geral das equações trigonométricas simples, quando $a = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$.

A equação $a*\sen x + b*\cos x = 0$, recebe o nome de equação homogénea trigonométrica do 1º grau. Ao passo que, a equação $a*\sen^2 x + b*\sen x \cos x + c*\cos^2 x = 0$, recebe o nome de equação homogénea do 2º grau.

De modo análogo é possível uma equação trigonométrica homogénea de qualquer grau natural n .

- **Algoritmos de resolução**

As equações do tipo $a*\sen x + b*\cos x = 0$ não têm uma única forma de resolução, a sua resolução depende sempre da criatividade, dos hábitos e habilidades do indivíduo e principalmente de todo um manancial de conhecimentos sobre aritmética, álgebra e conhecimentos específicos sobre trigonometria de forma geral.

Não obstante a isso serão apresentadas algumas vias e estratégias de resolução das equações trigonométricas do tipo $a*\sen x + b*\cos x = 0$

Dentre as vias existentes, podemos citar: aplicação do ângulo auxiliar, a aplicação de sistemas de equações de duas variáveis e a introdução da variável auxiliar.

- **Método do ângulo auxiliar**

Este método é empregado para resolver equações da forma

$a \cdot \text{sen} x + b \cdot \text{cos} x = c$ em que a , b e c representam números diferentes de zero.

Faz-se a aplicação do método do ângulo auxiliar da seguinte maneira:

a. Dividem-se ambos os membros da equação pelo coeficiente de $\text{sen} x$

ou seja, por a , obtendo-se a equação:

$$\text{sen} x + \frac{b}{a} \text{cos} x = \frac{c}{a}$$

b. Substitui-se o coeficiente de $\text{cos} x$ por $\text{tg} \alpha$ ficando, por isso, $\text{sen} x + \text{tg} \alpha \text{cos} x = \frac{c}{a}$, sendo $\text{tg} \alpha = \frac{b}{a}$

c. Como $\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha}$, obtem-se $\text{sen} x + \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} \text{cos} x = \frac{c}{a}$, ou desembaraçando de denominadores e simplificando, $\text{sen}(x + \alpha) = \frac{c}{a} \text{cos} \alpha$

d. Da igualdade $\text{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, tira-se um valor α , interessando apenas o que verificar a condição $0 \leq \alpha \leq \pi$ (α é o ângulo auxiliar). Este valor de α substituindo na equação da alínea anterior permite determinar valores de x que a verificam.

Exercícios resolvidos

Resolva a seguinte equação:

1. $\text{sen} x + \sqrt{3} \text{cos} x = 1$

Solução:

$\text{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 1$, como 1 é coeficiente de $\text{sen} x$ na equação dada, esta já se encontra na forma precisa para aplicar o indicado na alínea b) do procedimento.

$\text{tg} \alpha = \sqrt{3}$, conclui-se que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e, portanto:

$$\text{sen} x + \text{tg} \frac{\pi}{3} \cos x = 1 \leftrightarrow \text{sen} x \cos \frac{\pi}{3} + \text{sen} \frac{\pi}{3} \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{sen}(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \rightarrow x + \frac{\pi}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Portanto: } S = \{ \forall x \in \mathbb{R} / x = (-1)^k \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

Ou ainda por mais outra via, tem-se:

$\text{sen} x - \cos x = 1$, sabe-se que $\text{sen}(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$, então vem:

$\text{sen} x + \text{sen}(x - \frac{\pi}{2}) = 1$, pela formula de transformação da soma em produto, tem-se:

$$2\text{sen}(\frac{x + x - \frac{\pi}{2}}{2})\cos(\frac{x + x - \frac{\pi}{2}}{2}) = 1$$

$$2\text{sen}(x - \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}\text{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\text{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(-1)^k + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4}(-1)^k + \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{\forall x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4}(-1)^k + \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

• Métodos da substituição universal

O método da substituição universal, constitui uma das vias ou estratégias de resolução da equação trigonométricas da forma $a*\text{sen}x + b*\text{cos}x = c$, para tal basta substituir $\text{sen}x$ e $\text{cos}x$ por $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ e $\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, respectivamente, fazendo $tg\frac{x}{2} = u$, o que facilmente se resolve.

Exercícios resolvido:

Resolver as seguintes equações:

$$a. \sqrt{3}\text{sen}x + \text{cos}x = \sqrt{3}, \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Solução:

a. $\sqrt{3}\text{sen}x + \text{cos}x = \sqrt{3}$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, Substituindo $\text{sen}x$ e $\text{cos}x$ por $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ e $\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, respectivamente vem:

$$\sqrt{3}\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right) + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}tg\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

A fracção anterior é igual a zero se: $2\sqrt{3}tg\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})tg^2\frac{x}{2} = 0$ e $1 + tg^2\frac{x}{2} \neq 0$

$$2\sqrt{3}tg\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})tg^2\frac{x}{2} = 0$$

$$-(1 + \sqrt{3})tg^2 \frac{x}{2} + 2\sqrt{3}tg \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{3} = 0$$

Fazendo: $tg \frac{x}{2} = u$

$-(1 + \sqrt{3})u^2 + 2\sqrt{3}u + 1 - \sqrt{3} = 0$, aplicando a fórmula de Bháskara (fórmula resolvente da equação do 2º grau), obté-se $u = 1 \vee u = 2 - \sqrt{3}$

Retornando em $tg \frac{x}{2} = u$

Para $u = 1 \rightarrow tg \frac{x}{2} = 1 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $u = 2 - \sqrt{3} \rightarrow tg \frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctg(2 - \sqrt{3}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = 2\arctg(2 - \sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, então o conjunto de solução é: $S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$

1. b) $\text{sen}(6\pi + 3x) = 2\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Solução:

Pela redução de ângulos e pelo teorema do complemento, tem-se que:

$\text{sen}(6\pi + 3x) = \text{sen}3x$ e $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}x$, substituindo na equação teremos:

$$\text{sen}3x = 2\text{sen}x$$

$$3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x = 2\text{sen}x$$

$$\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x = 0$$

$$\operatorname{sen} x (1 - 4\operatorname{sen}^2 x) = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \vee 1 - 4\operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$x_1 = k\pi \vee -4\operatorname{sen}^2 x = -1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = k\pi \vee \operatorname{sen} x = \mp \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow \operatorname{sen} x = \mp \frac{1}{2}$$

$$x_1 = k\pi \vee x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$S = \{k\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$$

- **Método da aplicação de sistemas de duas variáveis**

A equação $a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c$, sendo a , b e c números reais conhecidos, pode ser resolvida mediante o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Fazendo $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, obtem—se o sistema:

$$\begin{cases} a \cdot u + b \cdot v = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Exercícios resolvidos.

Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$.

1. a) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

Solução:

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 0$$

Formando o Sistema tem-se: $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x = 0 & (I) \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & (II) \end{cases}$

Fazendo $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, obtem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u - v = 0 & (I) \\ u^2 + v^2 = 1 & (II) \end{cases}$$

De (I) tem-se $u = v$

Substituindo u por v em (II), vem:

$$u^2 + v^2 = 1 \rightarrow 2v^2 = 1 \rightarrow v^2 = \frac{1}{2} \rightarrow v = \pm \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para $v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se: $u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Obs: como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são negativos e valem ambos $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, então o argumento é do III quadrante, e é igual a $\frac{5}{4}\pi$. Determina-se os arcos cômruos a este mesmo argumento adicionando $2k\pi$.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto: $S = \{ \forall x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

- **Equações factoráveis**

As equações cujos membros apresentam somas de senos ou cossenos, podem ser resolvidas com o auxílio das fórmulas de transformação em produtos.

Exercícios resolvidos

Resolva a seguintes equação:

a. $\text{sen}3x + \text{sen}2x = 0$

Solução:

$$\text{sen}3x + \text{sen}2x = 0$$

$$2\text{sen}\left(\frac{3x+2x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x-2x}{2}\right) = 0$$

$$\text{sen}\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow \text{sen}\left(\frac{5x}{2}\right) = 0 \vee \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\text{sen}\left(\frac{5x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{5x}{2} = k\pi \rightarrow x = \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto: $S = \{\forall x \in \mathbb{R} / x = \frac{2}{5}k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercícios Gerais.

Resolver as seguintes equações:

a. $\text{sen}3x + \text{sen}5x = \text{sen}4x$

b. $\text{sen}3x + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{sen}5x + \frac{1}{2}\cos5x = 0$

c. $\text{sen}2x + 3\text{sen}x = 2$, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

d. $\text{sen}2x + 5\text{sen}x + 5\cos x + 1 = 0$

e. $3\text{sen}x - 4\cos x = 5$

f. $\text{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = \text{sen}(\frac{\pi}{6} - x)$, no intervalo $0 \leq x < \pi$

g. $\cos x - \sqrt{3}\text{sen} x = \cos 3x$

h. $\text{sen}^2 x + 2\sqrt{3}\text{sen} x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

i. $3\text{sen} x - 5\cos x + 5 = 0$

j. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$

k. $\sqrt{3} - \text{tg} x = \text{tg}(\frac{\pi}{3} - x)$

l. $1 + \text{sen} x = 2\cos x$, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo foi realizado na escola primária, Iº e IIº ciclo do ensino secundário “Delegado Eusébio Nelson”/centralidade do Dundo, Distrito urbano do Mussungue, criada pelo decreto executivo nº 123/2014. Teve o seu arranque em 2014, aguardando assim a sua inauguração, funciona nas instalações própria, construída de raiz, na centralidade do Dundo, com três pisos, composta por quarenta e duas salas de aulas, noventa turmas, funcionando em três turnos, com rácio de quarenta e cinco alunos por turma, e com capacidade de albergar 5.670 alunos em três períodos, possui trinta e três escritórios, três salas de ciências, três salas de músicas, três salas para professores, duas salas de reunião, uma sala de arrecadação, um pátio interior, uma sala de ginásio, um refeitório, um campo de futebol, quatro campos de basquetebol, uma pista de atletismo, uma cozinha, catorze casas de banhos para alunos, professores e funcionários em geral e uma casa de banho para cada Direcção-Geral.

Para a construção da investigação, foi aplicado uma entrevista ao subdirector pedagógico com o objetivo de ter uma caracterização sociopedagógica da escola, tendo em conta que a formação de estudantes passa pelos aspectos cognitivos e socio-afetivos, ou seja, da inter-relação e interdependência entre as condições internas (desenvolvimento actual e potencial de estudante) e as condições externas (condições sociais de vida e educação), pelo que, o primeiro aspecto significativo mostra que a escola localiza-se em uma zona urbana onde as relações sociais são avaliadas como aceitáveis e o nível de desenvolvimento dos habitantes se considera médio; o que induz aos investigadores a conclusão de que o meio socio-afectivo em que se desenvolve este processo é parcialmente favorável.

Esta pesquisa contou com 8 professores de matemática, destes apenas 3 lecionam 11ª Classe, estes indicadores conduziram aos autores deste trabalho investigativo à conclusão de que é um coletivo de experiente, pois têm mais de 10 anos, ademais é adequado nível de preparação para este tipo de ensino, pois os três são licenciados, além disso a experiência de trabalho na 11ª Classe é superior aos quatro anos para os três professores que trabalham na Classe.

Outro aspecto avaliado com a entrevista ao subdirector pedagógico da escola teve como foco a avaliação da apreciação deste quadro de direcção quanto ao nível de preparação do colectivo pedagógico e estudantil, assim como a motivação destes últimos para seu desempenho, do qual se conclui que o foco deste quadro de direcção é parcialmente objectiva, posição que resulta como conservadora se levada em conta os resultados de outros instrumentos como a prova pedagógica.

Por fim, efectuou-se uma investigação bibliográfica abordando o assunto do trabalho, após a leitura, uma investigação de campo em que os alunos da 11ª Classe do curso de “Ciências Físicas e Biológica” foram submetidos a uma prova pedagógica com determinados exercícios do tema proposto.

4.1. Análise e Interpretação de Dados

A análise e interpretação de dados desta investigação, para além de técnicas estatísticas que permitiu a tabulação, a elaboração de gráficos, a quantificação e cálculos de percentagens dos dados recolhidos, foi feita também, tendo em conta os princípios de indução e dedução da informação recolhida. Pois, permitiu tirar ilações dos aspectos particulares, constatados para cada um dos inquiridos, em concluir com precisão de forma geral. De acordo com o Marconi e Lakatos (2003) a “indução é um processo mental, por intermédio do qual, partindo de dados particulares, suficientemente constatados, infere-se uma verdade geral. Pois, é um método de análise (pp. 108-109).

4.2. População e amostra

A presente investigação teve uma população de 64 indivíduos, dos quais, um subdirector pedagógico, três professores de Matemática e seiscenta alunos da 11ª Classe, correspondente a duas salas do Complexo escolar Delegado Eusébio Nelson. Desta população, foi seleccionada intencionalmente uma amostra de 31 indivíduos correspondente a 48,43%, dos quais um (1) professor de Matemática e 30 alunos da 11ª Classe.

Vale salientar que a amostra foi seleccionada intencionalmente em função do histórico dado, isto é, das duas turmas inqueridas

selecionou-se uma turma em função da assiduidade e do rendimento escolar dos estudantes. Já o professor, foi o único que prestou informação precisas referente a investigação.

4.3. Análise e Discussão de Resultados Sobre Inquérito Aplicado

Passou-se de seguida a apresentar o estado atual da problemática em estudo, com base nos resultados obtidos durante trabalho de investigativo do campo realizado, com a participação de professores e alunos inqueridos.

Dos 31 indivíduos que constituíram a amostra desta investigação, 30 são alunos, correspondente a 96,77% da amostra, dentre estes, 13 do género masculino, correspondente a 43,33% e 17 de gênero feminino 56,66%. Um (1) professor do género masculino, correspondendo 100%. Tendo em conta o objetivo da investigação, os autores deste trabalho procuraram caracterizar o professor quanto ao tempo de serviço, onde pode-se constatar que o professor inquirido tem mais de 10 anos de serviço como professor de Matemática, sendo Licenciado em ensino de Matemática.

4.4. Resultado dos professores

Os resultados obtidos mediante o inquérito por questionário aplicado ao professor de Matemática, composto por seis questões e uma observação, que vão desde as causas, a importância de ensinar ou aprender as equações trigonométricas.

Tabela 2. Caracterização das questões inqueridas aos professores de matemática.

Nº	Questões	Fr	%
----	----------	----	---

1	Qual é a importância de ensinar o conteúdo das equações trigonométricas no ensino médio?	1	100
2	Que avaliação te auto-atribuis quanto a sua preparação para ensinar as equações trigonométricas em correspondência com as exigências para o programa deste nível de ensino?	1	100
3	Considera que o programa da disciplina de matemática ajunta-se as exigências do ensino médio?	1	100
4	Quais são suas dificuldades profissionais enquanto professor de matemática no ensino médio?	1	100
5	Utiliza outros livros de matemática além dos livros didáticos de reforma para preparação da sua aula?	1	100
6	Classifique a turma dos seus alunos em três níveis de aprendizagem	1	100
7	Quais são as principais insuficiências que o senhor professor observa na aprendizagem dos seus alunos e explique brevemente as causas das mesmas	1	100
8	Prove que: $\frac{1 + (\sin x)^2}{1 - (\sin x)^2} = 1 + (\tan x)^2$	1	100

9	Reduz para o primeiro quadrante: a) $\sin 280^\circ$ b) $\cos 340^\circ$	1	100
10	Determine o conjunto solução da seguinte equação trigonométrica: $2 - 2 \cos x = \sin x \cdot \tan x$	1	0

Fonte: elaboração própria dos autores a partir dos inquéritos aplicado aos professores, 2024.

Durante a qualificação, os autores atribuíram ao Professor 100% nas questões de 1 à 9 e 0% na questão nº 10, consoante as respostas dadas pelo Professor através do questionário. Como pode se ver na tabela acima, a atribuição dos 100% ao Professor nas questões 1 a 9, e conclui-se da seguinte maneira:

Nas primeiras nove questões, o Professor aponta que tem uma base de conhecimento sólida, sobre a trigonometria, também considera importante ensinar as equações trigonométricas, “pois, ela desenvolve o raciocínio lógico que possibilitará o entendimento de questões complexas na universidade”.

A décima questão, surpreendentemente aponta para 0%. Deixando claro a importância de se relacionar os conhecimentos anteriores as equações trigonométricas e a capacidade de se desenvolver o raciocínio lógico na manipulação desses conhecimentos para facilitar a resolução de certos exercícios ligados as equações trigonométricas.

4.5. Resultados dos alunos

Passemos de seguida, a apresentar os resultados obtidos pelos alunos, a partir do questionário aplicado a eles, importa realçar que o questionário aplicado aos alunos teve como objetivo, identificar desde já as dificuldades dos alunos, no que diz respeito a assimilação dos conteúdos das equações trigonométricas, plasmados no programa de matemática da reforma educativa, no ensino médio. Por esta razão foi lhes aplicado três questões: destas, uma centrada nas identidades trigonométricas, uma voltada para a redução de ângulos, e por último, uma questão directamente ligada as equações trigonométricas.

Tabela 3. Caracterização das questões inqueridas aos alunos.

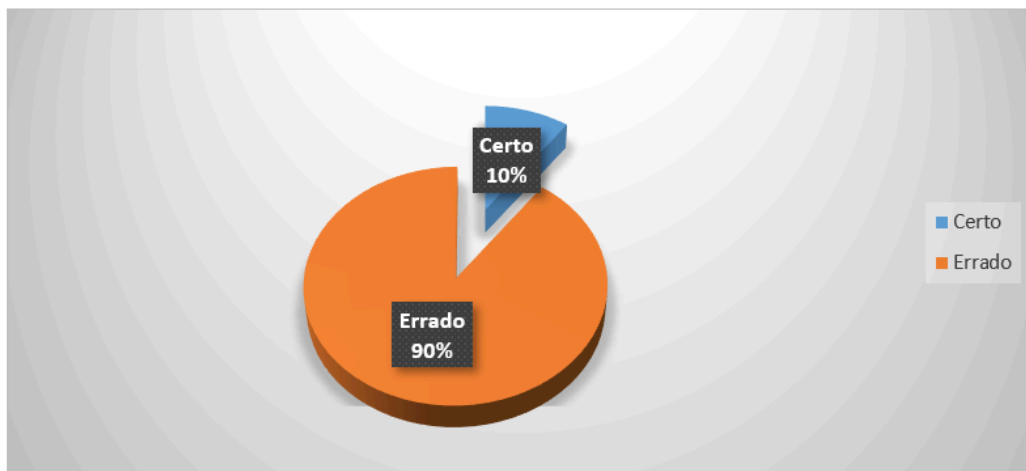
Q_1					
Prove que:					
$\cos x \tan x = \sin x$					
Certo		Errado		Certo	
Fr	%	Fr	%	Fr	%
3	10	27	90	21	70

⚠ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/proposta-didatica-para-mitigacao-das-dificuldades-enfrentandas-no-processo-de-ensino-e-aprendizagem-das-equacoes-trigonometricas-na-11-classe-uma-visao-docente?noblockage>

Fonte: elaboração própria dos autores a partir dos inquéritos aplicado aos alunos, 2024.

A tabela a cima, espelha os resultados das questões aplicadas no questionário sobre as identidades trigonométricas, redução de quadrantes e equações trigonométricas, com objetivo de identificar as dificuldades e ter uma ideia do nível de conhecimento que os alunos possuem no que concerne a problemática em estudo. Estes alunos, mostram um coeficiente negativo do nível de conhecimentos sobre equações trigonométricas. Com base nos dados descritos na tabela a cima, fez-se uma caracterização singular das questões 1, 2 e 3.

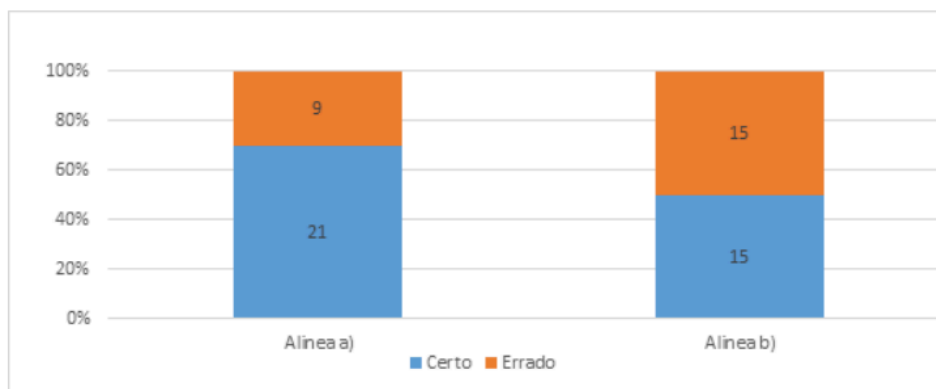
Gráfico 1. Caracterização da primeira questão, (Q_1)



Fonte: elaboração própria dos autores a partir dos inquéritos aplicado aos alunos, 2024.

Interpretação do gráfico 1: O gráfico acima revela que dos trintas (30) alunos inqueridos, três (3) destes, correspondente a 10%, resolveram com êxito a questão relacionada as identidades trigonométricas. Vinte e sete (27) dos inqueridos, correspondente a 90% resolveram errado a mesma questão.

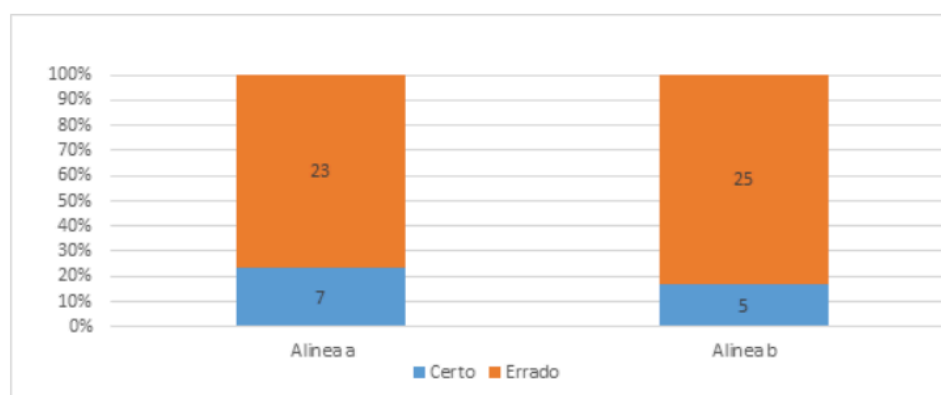
Gráfico 2. Caracterização da segunda questão, (Q_2).



Fonte: elaboração própria dos autores a partir dos inquéritos aplicado aos alunos, 2024.

Interpretação do gráfico 2.2: O gráfico acima espelha que; dos trintas (30) alunos inqueridos, vinte e um (21) destes, correspondente a 70%, resolveram com êxito a questão relacionada a redução de ângulos da alínea a), nove (9) destes, correspondente a 30%, não resolveram com êxito a questão. Já na alínea b), quinze (15) dos alunos inqueridos, correspondente a 50% resolveram com êxito e quinze (15) destes, correspondente a 50% não resolveram com êxito a questão.

Gráfico 3. Caracterização da terceira questão, (Q_3)



Fonte: elaboração própria dos autores a partir dos inquéritos aplicado aos alunos, 2024.

Interpretação do gráfico 3: O gráfico acima espelha que; dos trintas (30) alunos inqueridos, sete (7) destes, correspondente a 23%, resolveram com êxito a questão relacionada a equação trigonométrica da alínea a), vinte e três (23) destes, correspondente a

77%, não resolveram com êxito a questão. Já na alínea b), cinco (5) dos alunos inqueridos, correspondente a 17% resolveram com êxito, e vinte e cinco (25) destes, correspondente a 83% não resolveram com êxito a questão.

Com base as interpretações feitas a cada questão (gráficos), se pode constatar nestes alunos um coeficiente negativo do nível de conhecimentos referente as equações trigonométricas

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das equações trigonométricas está subordinado a muitos conhecimentos matemáticos, desde a álgebra, aritmética e a própria trigonometria de forma específica. A necessidade de propiciar uma perspectiva globalizante do conhecimento matemático sobre trigonometria de modo a entende-la de forma integrada e o facto de as competências mobilizarem múltiplos saberes para a acção, desenvolveu-se o trabalho sob o tema: Proposta didáctica para o processo de ensino e aprendizagem das equações trigonométricas nos alunos da 11ª classe no complexo escola delegado Eusébio Nelson.

As equações trigonométricas integram a própria trigonometria, visto que para sua resolução é necessário que o aluno tenha domínio das relações trigonométricas fundamentais, derivadas, as fórmulas de arcos complementares e suplementares, as fórmulas de adição e subtracção de arcos, fórmulas do arco duplo, arco metade e as fórmulas trigonométricas de transformação logarítmica. Ou seja, a resolução das equações trigonométricas do tipo $\text{sen } x = a$, $\text{cos } x = a$ e $\text{tg } x = a$, estão subordinadas a todo um aparato muito forte sobre os conhecimentos de Trigonometria.

A proposta que se apresenta, para elevar a qualidade de Ensino e Aprendizagem e minimizar as dificuldades encontradas no processo de Ensino-Aprendizagem das Equações Trigonométricas, fazendo uso de métodos activos, demonstrou ser exequível e pertinente segundo a avaliação positiva realizada pelos peritos; A proposta possibilita que:

- Os professores que leccionam a 11ª classe e não só, tenham um guia em que se possam apoiar para o Ensino das equações trigonométricas da forma: $\operatorname{sen} x = a$, $\operatorname{cos} x = a$ e $\operatorname{tg} x = a$;
- Os alunos podem desenvolver o pensamento reflexivo e abstracto e integrado da trigonometria mediante a inclusão dos conteúdos e objectivos presentes na proposta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGOLA. Lei n.º 32/20, de 12 de agosto de 2020. Altera a Lei n.º 17/16, de 07 de outubro — Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino. Luanda: Diário da República de Angola, 12 ago. 2020.

Caldeira, Maria Filomena Seran. Aprender a matemática de uma forma lúcida: a importancia dos Materiais para uma aprendizagem significative da Matemática. Lisboa, Escola Superior de Educação João de Deus, 2009. Tese de Doutoramento.

CAMPOS, Inês da Silva Pinto. Trigonometria: encantos e recantos de uma abordagem didática. 2017. Tese (Doutorado em Educação/Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.

DE AMBRÓSIO, Ubiratan. interdisciplinaridade. 2. Ed. São paulo, palas Athena, 2009

DE ANDRADE, Lenimar Nunes. Trigonometria e equações polinomiais. Revista do Professor de Matemática, 2018.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/32144/1/2018_RachelSaffirAraujoAlvesFeijo.pdf. Acesso em: 24 fev. 2026.

GONÇALVES, Carlos H. B.; OLIVEIRA, Zaqueu Vieira. A atividade matemática de Adriaan van Roomen. Revista Brasileira de História da Matemática, 2007.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, v. 3, 2016.

JÚNIOR, Carlos Alberto Martinho. Uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015.

MANGAS, Evaristo José das. Proposta de introdução do tema equações trigonométricas da forma $R(\sin x, \cos x = c)$ no Capítulo I: Trigonometria, no programa da 11ª classe do II Ciclo do Ensino Secundário. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ensino da Matemática) – Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla, Repartição de Matemática, Lubango, 2014.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. Metodologia do trabalho científico. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

PACHECO, Marina B.; ANDREIS, Greice S. L. Análise na rede pública estadual de ensino de Caxias do Sul das causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 1, n. 1, p. 1-15, 2015.

PEREIRA, C. S. Aprendizagem em trigonometria no Ensino Médio: contribuições da teoria da aprendizagem significativa. 1. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2013.

TOMÁS, M. T. Matemática 11ª Classe. Luanda: Editora Moderna, 2006.

TRINDADE, F. M. P. Matemática 10ª Classe. Luanda: Editora Moderna, 2010.

¹ Mestrando em Metodologia de Ensino da Matemática pelo Instituto Superior de Ciências da Educação de Benguela (ISCED-Benguela). ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-3808-8386>. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#)

² Licenciado em Ciências da Educação na especialidade de Ensino de Matemática pela Escola Pedagógica do Dundo da Universidade Lueji A ´nkonde (EPD-ULAN). ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5652-9214>. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#)