

**A EVOLUÇÃO DAS
PESQUISAS SOBRE A
CONJECTURA DE
GOLDBACH (1966-2013):
DOS RESULTADOS DE CHEN
À DEMONSTRAÇÃO DE
HELFGOTT**

**THE EVOLUTION OF RESEARCH ON GOLDBACH'S CONJECTURE (1966–
2013): FROM CHEN'S RESULTS TO HELFGOTT'S PROOF**

Ciências Exatas e da Terra • 25/08/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/787629901](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/787629901)

Carlos Daniel Chaves Mourão¹

Rildo Alves do Nascimento²

Clara Rodrigues Aguiar³

Manoel Evaldo da Silva Soares⁴

Antonia Rodrigues Madeiro⁵

Roberto Ferreira Sena Filho⁶

Anderson Amaro Vieira⁷

Plácido Anthony Lima Martins Queiroz⁸

RESUMO

A conjectura de Goldbach, formulada no século XVIII, permanece como um dos problemas mais conhecidos e desafiadores da Matemática. Ao longo de quase três séculos, diversos matemáticos desenvolveram métodos e resultados parciais que contribuíram para ampliar a compreensão do problema, mesmo sem alcançar uma demonstração da conjectura forte. Nesse sentido, este artigo tem como objetivo analisar os principais avanços obtidos entre 1966 e 2013, período marcado por importantes contribuições para o estudo da conjectura, com destaque para resultados como os do matemático chinês Chen Jingrun e do peruano Harald Andrés Helfgott. A pesquisa se caracteriza como qualitativa, de natureza bibliográfica, fundamentada na análise de livros, artigos científicos e demais publicações especializadas sobre a temática. Os resultados mostram que, nesse intervalo, foram alcançados progressos significativos por meio do aperfeiçoamento de técnicas analíticas e da combinação de diferentes métodos da Teoria dos Números e de outras áreas, culminando na demonstração da conjectura fraca de Goldbach por Helfgott, sem recorrer à hipótese de Riemann. Além disso, observa-se que o teorema de Chen representou um dos resultados mais expressivos já obtidos em direção à resolução da conjectura forte. Conclui-se que o período analisado consolidou avanços fundamentais para a compreensão da conjectura de Goldbach, evidenciando o caráter cumulativo da pesquisa matemática e a relevância das contribuições desenvolvidas ao longo das últimas décadas.

Palavras-chave: Conjectura de Goldbach; Teoria dos Números; Chen Jingrun; Harald Andrés Helfgott; História da Matemática.

ABSTRACT

Goldbach's conjecture, formulated in the eighteenth century,

remains one of the best-known and most challenging problems in Mathematics. Over nearly three centuries, several mathematicians have developed methods and partial results that have contributed to a broader understanding of the problem, even without achieving a proof of the strong conjecture. In this context, this article aims to analyze the main advances achieved between 1966 and 2013, a period marked by important contributions to the study of the conjecture, with emphasis on results such as those obtained by the Chinese mathematician Chen Jingrun and the Peruvian mathematician Harald Andrés Helfgott. The research is characterized as qualitative and bibliographic in nature, based on the analysis of books, scientific articles, and other specialized publications on the subject. The results show that, during this period, significant progress was achieved through the improvement of analytical techniques and the combination of different methods from Number Theory and other fields, culminating in Helfgott's proof of the weak Goldbach conjecture without relying on the Riemann Hypothesis. Furthermore, Chen's theorem stands out as one of the most significant results achieved toward solving the strong conjecture. It is concluded that the period analyzed consolidated fundamental advances in the understanding of Goldbach's conjecture, highlighting the cumulative nature of mathematical research and the relevance of contributions developed over recent decades.

Keywords: Goldbach's Conjecture; Number Theory; Chen Jingrun; Harald Andrés Helfgott; History of Mathematics.

1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números apresenta uma característica marcante, que é o fato de que muitos de seus problemas podem ser formulados de

maneira simples, mas permanecem extremamente complexos quando se busca uma solução. Os números primos, em particular, desafiam abordagens puramente sistemáticas, exigindo frequentemente estratégias criativas e sofisticadas. Essa dificuldade explica a existência de diversos problemas matemáticos que permanecem sem resposta há séculos, como a possibilidade da existência de números perfeitos ímpares e a infinitude dos primos gêmeos. Entre essas questões de longa duração se encontra também a conjectura de Beal, que amplia esse conjunto de problemas ainda não solucionados e evidencia os limites do conhecimento matemático contemporâneo (Garibaldi, 2003).

Nesse contexto, destaca-se a conjectura de Goldbach, uma das questões mais conhecidas da Teoria dos Números. Sua origem está na correspondência entre o matemático prussiano Christian Goldbach (1690-1764) e o suíço Leonard Euler (1707-1783), no século XVIII, a partir da proposição de que todo número par maior ou igual a 4 pode ser representado como a soma de dois números primos. Embora essa afirmação ainda não tenha sido demonstrada em sua forma forte, as tentativas de comprová-la produziram importantes avanços na área e deram origem a diferentes resultados teóricos. Entre eles, destacam-se estudos que demonstraram possibilidades de representar números inteiros por meio da soma de um número limitado de parcelas primas, contribuindo gradualmente para a compreensão e o desenvolvimento de métodos relacionados à conjectura (Garibaldi, 2003).

Ao longo do século XX, diferentes pesquisadores desenvolveram métodos da Teoria Analítica dos Números com o propósito de compreender e se aproximar da resolução da conjectura. Nesse processo, a investigação não se limitou à tentativa de demonstrar

diretamente a afirmação original, mas também produziu resultados parciais e versões enfraquecidas da conjectura. Entre esses avanços, destaca-se o trabalho do matemático chinês Chen Jingrun (1933-1996), que, em 1966, estabeleceu um resultado de grande relevância ao demonstrar que todo número par suficientemente grande pode ser representado como a soma de um número primo e de um número que é primo ou semiprimo, isto é, possui no máximo dois fatores primos. O chamado teorema de Chen representou um importante marco na pesquisa, aproximando significativamente os resultados conhecidos da formulação original de Goldbach.

De acordo com Paiva (2023, p. 27), o resultado alcançado por Chen é “considerado o mais bem sucedido até o momento por conta de dois aspectos: o primeiro, é o fato de ele não utilizar a hipótese de Riemann; o segundo, porque é o enunciado mais próximo que se tem do da conjectura forte de Goldbach”. Para alcançar esse resultado, Chen Jingrun se baseou tanto em estudos anteriores relacionados à Conjectura de Goldbach quanto em importantes resultados da Teoria dos Números. Entre os principais fundamentos utilizados estão o Teorema dos Números Primos, o Teorema de Bombieri–Vinogradov, o Teorema de Siegel–Walfisz e o Teorema de Jurkat–Richert. A articulação desses resultados forneceu o suporte teórico necessário para o desenvolvimento de suas investigações (Paiva, 2023).

Nas décadas seguintes, o estudo da conjectura continuou associado ao desenvolvimento de técnicas relacionadas às somas de números primos, à análise harmônica e aos métodos computacionais. Paralelamente aos resultados teóricos, verificações numéricas em grandes intervalos contribuíram para ampliar a evidência em favor da conjectura, embora a confirmação computacional, por mais

abrangente que seja, não substitua uma demonstração matemática geral.

Nesse contexto, o período compreendido entre 1966 e 2013 apresenta particular importância para a história recente da conjectura de Goldbach. O intervalo tem como ponto de partida o resultado de Chen Jingrun e culmina, em 2013, com o trabalho do matemático peruano Harald Andrés Helfgott (1977-) sobre a chamada conjectura fraca de Goldbach. Helfgott demonstrou que todo número ímpar maior que 5 pode ser escrito como a soma de três números primos, resultado que resolveu definitivamente a versão ternária da conjectura. Embora esse resultado não corresponda diretamente à demonstração da conjectura forte, ou binária, de Goldbach, sua importância para o desenvolvimento do problema é fundamental, uma vez que encerra uma das principais vertentes históricas da investigação e estabelece uma conexão relevante entre diferentes formulações da conjectura.

Dessa forma, analisar a evolução das pesquisas nesse intervalo permite compreender que o desenvolvimento da conjectura de Goldbach não ocorreu por meio de uma sequência linear de tentativas isoladas, mas através da acumulação de resultados, técnicas e aproximações progressivas. Os trabalhos de Chen e Helfgott, embora tratem de versões distintas do problema, representam marcos fundamentais desse percurso e ajudam a compreender os limites e as possibilidades da investigação matemática sobre a distribuição dos números primos.

Diante disso, este artigo tem como objetivo analisar os principais avanços obtidos entre 1966 e 2013 no estudo da conjectura de Goldbach. A análise pretende, assim, evidenciar como resultados

parciais, métodos teóricos e recursos computacionais contribuíram para transformar progressivamente a compreensão de um dos problemas mais persistentes da Teoria dos Números.

A elaboração de um estudo sobre a evolução das pesquisas relacionadas à conjectura de Goldbach constitui uma tarefa particularmente desafiadora, sobretudo em razão da escassez de produções nacionais que abordem o problema de maneira histórica, sistemática e suficientemente aprofundada. Quando presente na literatura brasileira, a conjectura é frequentemente tratada de forma introdutória ou superficial, o que dificulta a construção de uma visão mais ampla acerca dos resultados, métodos e pesquisadores que contribuíram para o desenvolvimento de seu estudo.

Nesse sentido, para a elaboração deste trabalho, buscamos nos apoiar principalmente na obra de Yuan (2002), que apresenta uma abordagem abrangente sobre os avanços relacionados à conjectura, e no trabalho de Paiva (2023), que contribui para a sistematização e contextualização de importantes resultados. Soma-se a essa dificuldade a existência de numerosas publicações, tanto nacionais quanto internacionais, que apresentam supostas demonstrações da conjectura de Goldbach sem que seus argumentos constituam provas matemáticas válidas, situação que pode induzir ao equívoco leitores que não possuem formação específica em Teoria dos Números. Desse modo, a análise aqui desenvolvida procura privilegiar resultados matematicamente reconhecidos e fontes que permitam compreender, com maior rigor, a trajetória das pesquisas sobre a conjectura, distinguindo avanços efetivamente estabelecidos de alegações de demonstração que permanecem sem validade ou reconhecimento pela comunidade matemática.

2. A CONJECTURA DE GOLDBACH E SEUS FUNDAMENTOS NA TEORIA DOS NÚMEROS

O conceito de número primo ocupa uma posição fundamental na Teoria dos Números. Considera-se primo todo número inteiro positivo maior ou igual a 2 que possui apenas dois divisores positivos distintos: o número 1 e ele próprio. Esses números estão relacionados a diversos problemas relevantes da Matemática, alguns dos quais permanecem sem solução até os dias atuais. Entre essas questões está a conjectura de Goldbach, formulada em 1742 e ainda não comprovada de maneira definitiva, mesmo após mais de dois séculos de investigações (Paiva, 2023).

Christian Goldbach nasceu em Königsberg, filho de um pastor protestante, e recebeu sua formação inicial na universidade de sua cidade, onde teve contato com Matemática, embora seus estudos tenham se concentrado principalmente em Direito e Medicina. A partir de 1710, iniciou uma longa viagem pela Europa, período em que estabeleceu contato com importantes intelectuais da época. Entre eles estavam Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), com quem manteve correspondência, além dos irmãos Bernoulli e Abraham de Moivre (1667-1754). Essas relações contribuíram para ampliar seu interesse pela Matemática e aproximá-lo dos principais debates científicos de seu tempo. Embora inicialmente apresentasse limitações em alguns temas matemáticos, Goldbach passou a aprofundar seus estudos, especialmente sobre séries infinitas, publicando trabalhos a partir da década de 1720 (O'Connor; Robertson, 2006).

Sua trajetória profissional ganhou maior destaque com sua participação na criação da Academia de Ciências de São

Petersburgo, onde atuou como professor de Matemática e historiador. Posteriormente, ocupou funções administrativas na Academia e cargos ligados ao governo russo, chegando a exercer atividades de grande influência na administração pública e na educação da família imperial. Mesmo diante das constantes mudanças políticas na Rússia, Goldbach conseguiu preservar posições de prestígio, favorecido por sua formação, domínio de diferentes idiomas e ampla rede de relações intelectuais. Em seus trabalhos matemáticos, dedicou-se principalmente à Teoria dos Números e ao estudo de séries, além de desenvolver investigações relacionadas a equações e propriedades dos números (O'Connor; Robertson, 2006).

Entretanto, sua principal contribuição para a Matemática está associada à correspondência mantida com Leonhard Euler. Em uma carta de 1742, Goldbach apresentou a proposição que posteriormente ficou conhecida como conjectura de Goldbach, segundo a qual todo número inteiro par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos. A conjectura permanece sem demonstração definitiva e se tornou um dos problemas clássicos da Teoria dos Números (O'Connor; Robertson, 2006).

Figura 1. Correspondência entre Euler e Goldbach.

O legado das tentativas de demonstração tem uma grande contribuição na Matemática. As demonstrações são fundamentais para a consolidação e desenvolvimento do conhecimento matemático, porém sua importância é muito maior do que provar a veracidade de afirmações (Bitencourt, 2018, p. 36).

Sousa (2013) destaca que os estudos relacionados à conjectura de Goldbach têm contribuído para ampliar o conhecimento produzido na própria Teoria dos Números, uma vez que as investigações realizadas possibilitaram a obtenção de resultados relevantes que, futuramente, podem auxiliar na busca por uma demonstração da conjectura. Além disso, o autor ressalta que as pesquisas desenvolvidas em torno desse problema favoreceram a criação e o aprimoramento de métodos matemáticos que podem ser empregados não apenas na Teoria dos Números, mas também em diferentes campos da Matemática (Sousa, 2013).

A demonstração da conjectura fraca de Goldbach por Helfgott representa um avanço significativo para a Matemática, especialmente para a Teoria dos Números, ainda que seus resultados tenham aplicação limitada na resolução da versão forte. Além de confirmar uma importante hipótese matemática, esse feito contribuiu para renovar o interesse dos pesquisadores pela conjectura de Goldbach e pelos desafios envolvidos em sua demonstração definitiva. Apesar dos avanços acumulados ao longo dos anos, a resolução da conjectura forte ainda se apresenta como um problema complexo, cuja solução poderá exigir muitas décadas adicionais de investigação matemática (Paiva, 2023).

3. DOS PRIMEIROS AVANÇOS AOS RESULTADOS DE CHEN JINGRUN

A conjectura de Goldbach é considerada um dos problemas mais conhecidos e desafiadores da Teoria Dos Números e da Matemática em geral. Em 1921, o matemático britânico G. H. Hardy (1877-1947) destacou sua elevada dificuldade, comparando-a a alguns dos problemas matemáticos ainda não solucionados. Durante muito tempo, as pesquisas sobre a conjectura se limitaram principalmente à realização de verificações numéricas e à formulação de novas hipóteses, uma vez que ainda não havia um método matemático capaz de conduzir à sua demonstração completa (Yuan, 2002).

As primeiras investigações sobre a Conjectura de Goldbach remontam ao século XIX, embora os avanços mais expressivos tenham ocorrido somente no século XX. Durante esse período, diversos matemáticos de grande relevância histórica desenvolveram seus trabalhos, entre eles Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Ernst Kummer (1810-1893); Richard Dedekind (1831-1916), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Joseph Fourier (1768-1830), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Henri Poincaré (1854-1912), Niels Henrik Abel (1802-1829) e Sophus Lie (1842-1899) (Paiva, 2023).

Não há registros precisos que permitam afirmar quais deles tiveram conhecimento da conjectura. Sabe-se, contudo, que Euler considerava a proposição provavelmente verdadeira, embora reconhecesse não dispor de uma demonstração. Com o passar do tempo, a questão ganhou ainda maior destaque, sendo incluída por David Hilbert, em 1900, entre os problemas relacionados à Teoria dos

Números apresentados no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris (Paiva, 2023).

A conjectura de Goldbach também permanece associada a outros grandes problemas da Matemática, especialmente à hipótese de Riemann e à conjectura dos primos gêmeos. A hipótese de Riemann, por exemplo, continua sem solução apesar dos avanços computacionais e teóricos obtidos ao longo dos anos, e diversos resultados matemáticos, inclusive relacionados à conjectura de Goldbach, foram estabelecidos assumindo sua validade (Paiva, 2023).

No século XIX, período marcado por profundas transformações científicas, tecnológicas, políticas e sociais, impulsionadas pela Revolução Industrial e por invenções que modificaram significativamente a sociedade, surgiu também as primeiras investigações sistemáticas sobre a conjectura de Goldbach. Em 1855, Louis-Charles-Antoine Desboves (1792-1883) verificou sua validade para números pares até 10.000, constituindo um dos primeiros registros conhecidos de investigação sobre o problema. Posteriormente, Georg Cantor (1845-1918) apresentou, em 1894, uma tabela com decomposições dos números pares até 1.000 em somas de dois primos, enquanto Carl Hermann Robert Haussner (1863-1948) ampliou as verificações para 100.000 e, posteriormente, para 1.000.000. Embora esses resultados não representassem, obviamente, uma demonstração da conjectura, contribuíram para ampliar o interesse matemático pelo problema e estimularam novas pesquisas nos períodos seguintes (Paiva, 2023).

O século XX, por sua vez, também foi marcado por profundas transformações políticas, sociais e culturais que modificaram significativamente a organização das sociedades. No campo político,

destacaram-se as duas Guerras Mundiais, a Revolução Russa, a ascensão de regimes totalitários, a Guerra Fria e os processos de descolonização, acontecimentos que redefiniram as relações entre países e povos. Socialmente, o período foi caracterizado por importantes movimentos em defesa dos direitos civis, da igualdade de gênero, dos direitos trabalhistas e da ampliação da participação política. No âmbito cultural, o século também testemunhou grandes mudanças nas artes, na literatura, na música e nos meios de comunicação, impulsionadas pelo desenvolvimento do rádio, do cinema, da televisão e, posteriormente, das tecnologias digitais.

Para além disso, tal século também foi marcado pela atuação de grandes matemáticos, cujas contribuições influenciaram profundamente o desenvolvimento da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Entre eles, destacam-se David Hilbert (1862–1943), Henri Poincaré (1854–1912), Emmy Noether (1882–1935), Srinivasa Ramanujan (1887–1920), Kurt Gödel (1906–1978), Alan Turing (1912–1954), John von Neumann (1903–1957) e Alexander Grothendieck (1928–2014). Esses estudiosos contribuíram para campos como álgebra, geometria, lógica, Teoria dos Números, computação e fundamentos da Matemática, demonstrando a importância desse período para a consolidação e a expansão do pensamento matemático moderno.

Como bem destacado por Paiva (2023, p. 23):

Foi a partir desse século que importantes estudos começaram a ser feitos e divulgados, com o objetivo de provar a conjectura de Goldbach (ou pelo menos aumentar o arsenal de ferramentas para começar a “atacar” o problema, que até então era praticamente inexistente). [...] As demonstrações desses resultados são [...] demasiadamente complexas; a grande maioria com dezenas de páginas.

Os primeiros avanços significativos ocorreram nas primeiras décadas do século XX. Em 1919, o matemático norueguês Viggo Brun (1885-1978) desenvolveu um método baseado em técnicas de peneiramento e demonstrou que números pares suficientemente grandes poderiam ser representados como a soma de dois números com uma quantidade limitada de fatores primos. Posteriormente, em 1923, Hardy e Littlewood (1885-1977) utilizaram o chamado método do círculo para obter resultados importantes relacionados à representação de números como somas de primos, embora parte de suas conclusões dependesse da validade da hipótese de Riemann generalizada (Yuan, 2002).

Na década seguinte, outros matemáticos ampliaram esses resultados. Em 1930, o russo L. G. Schnirelmann (1905-1938) combinou ideias do método de Brun com uma abordagem relacionada à densidade de sequências de inteiros, demonstrando que todo inteiro maior que 2 pode ser expresso como uma soma de uma quantidade limitada de números primos. Em 1937, I. M. Vinogradov (1891-1983) aperfeiçoou as técnicas existentes por meio do método do círculo e de novos procedimentos para estimar somas exponenciais envolvendo números primos, conseguindo eliminar a

dependência da hipótese de Riemann generalizada nos resultados anteriores. Esses avanços contribuíram significativamente para o desenvolvimento da teoria aditiva dos números e para o estudo da própria conjectura de Goldbach (Yuan, 2002).

Após os resultados obtidos por Vinogradov em 1937, novos avanços, embora ainda parciais, contribuíram gradualmente para o desenvolvimento dos estudos sobre a conjectura de Goldbach. Em 1938, Tchudakov reforçou o resultado de que quase todos os números pares podem ser representados como soma de dois números primos, resultado que já havia sido investigado por Littlewood na década de 1920. Em 1948, Rényi conseguiu eliminar a dependência da Hipótese de Riemann em um resultado anteriormente obtido por Estermann. Posteriormente, em 1956, Borodzkin estabeleceu uma estimativa para a expressão “suficientemente grande”, indicando que, nesse contexto, os números deveriam ser superiores a $10^{7.000.000}$ (Paiva, 2023).

Em 1962, Yuan e Buhstab avançaram ainda mais ao demonstrar que todo número par suficientemente grande pode ser representado pela soma de um número primo com um número formado por, no máximo, três fatores primos. Embora nenhum desses resultados tenha solucionado definitivamente a conjectura, cada contribuição ampliou o conhecimento sobre a distribuição dos números primos e preparou o caminho para resultados posteriores, como os obtidos por Chen (Paiva, 2023).

É importante destacar que os avanços alcançados no estudo da conjectura de Goldbach estão diretamente relacionados ao desenvolvimento da teoria analítica dos números ao longo do século XIX. Nesse período, matemáticos como Chebyshev (1821-1894),

Dirichlet (1805-1859), Riemann, Hadamard (1865-1963), de la Vallée Poussin (1866-1962) e von Mangoldt (1854-1925) produziram resultados fundamentais sobre a distribuição dos números primos, estabelecendo bases teóricas indispensáveis para as pesquisas posteriores. A partir desses conhecimentos, foi possível desenvolver métodos e ferramentas cada vez mais sofisticados para investigar a conjectura de Goldbach e compreender a relação entre os números primos e sua representação como somas. Dessa forma, a evolução dos estudos sobre a conjectura deve ser compreendida em conjunto com o progresso da teoria dos números e, especialmente, com os resultados obtidos acerca da distribuição dos primos (Yuan, 2002).

Assim, desde a década de 1920, o estudo da conjectura de Goldbach apresentou avanços expressivos, com resultados que contribuíram para uma compreensão mais aprofundada da representação dos números inteiros por meio de números primos. Entre os principais marcos, destaca-se o trabalho de Vinogradov, que, em 1937, demonstrou o chamado teorema dos três primos. Posteriormente, em 1966, o matemático chinês Chen Jingrun alcançou um resultado de grande relevância, aproximando-se significativamente da solução da conjectura (Yuan, 2002).

Além dos resultados diretamente relacionados à conjectura de Goldbach, as pesquisas desenvolvidas nesse campo tiveram impacto mais amplo na Matemática. Os problemas associados à conjectura estimularam a criação e o aperfeiçoamento de diversos métodos da Teoria dos Números, especialmente aqueles voltados ao estudo dos números primos e de sua distribuição. Essas ferramentas passaram a ser utilizadas não apenas na própria teoria dos números, mas também em diferentes áreas da Matemática, evidenciando a

importância da investigação da conjectura de Goldbach para o desenvolvimento do conhecimento matemático (Yuan, 2002).

4. A CONJECTURA FRACA DE GOLDBACH E A DEMONSTRAÇÃO DE HARALD HELFGOTT

Cerca de uma década após o resultado de Chen, Montgomery e Robert Vaughan apresentaram um resultado que representou um importante avanço no estudo da conjectura de Goldbach. Eles definiram $E(X)$ como a quantidade de números pares menores ou iguais a X que não podem ser expressos como soma de dois números primos e demonstraram que $E(X) < X^{1-\delta}$, para alguma constante positiva δ . Embora os valores de (X) e δ ainda não fossem conhecidos, o resultado indicava que a quantidade de números pares que poderiam contrariar a conjectura era relativamente pequena. Posteriormente, em 1980, Chengdong Pan e Chen obtiveram uma estimativa para essa constante, estabelecendo que $\delta > 0,04$ (Paiva, 2023).

Outros avanços importantes ocorreram nas décadas seguintes. Em 1989, Chen Jingrun e T. Z. Wang reduziram significativamente o limite estabelecido por Borodzkin em 1956 para os números a partir dos quais os resultados poderiam ser considerados válidos. Em 1996, esse limite foi novamente reduzido, embora permanecesse extremamente elevado, tornando inviável a verificação direta de todos os casos, mesmo com recursos computacionais avançados. Paralelamente, em 1995, Olivier Ramaré aprimorou o resultado de Schnirelmann ao demonstrar que todo número par maior que 2 pode ser representado como a soma de, no máximo, seis números primos, constituindo mais um avanço relevante na compreensão das representações aditivas dos inteiros (Paiva, 2023).

No final do século XX, novas contribuições ampliaram ainda mais os resultados relacionados à conjectura. Em 1997, Jean-Marc Deshouillers, Gérard Effinger e Hendrik te Riele demonstraram que a hipótese de Riemann implica a validade da conjectura fraca de Goldbach para todos os números ímpares. Já em 2000, Hongze Li refinou a estimativa associada ao trabalho de Montgomery e Vaughan, obtendo aproximadamente $\delta = 0,086$. Esses resultados não representaram a demonstração definitiva da conjectura de Goldbach, mas evidenciaram o avanço progressivo das técnicas da Teoria dos Números e a redução das possibilidades de existência de contraexemplos (Paiva, 2023).

Assim, se $E(X)$ é a função que representa a quantidade de números pares menores ou iguais a X que não podem ser expressos como a soma de dois números primos, esses números formam o chamado conjunto excepcional do problema de Goldbach. Dessa forma, a conjectura de Goldbach pode ser formulada de maneira equivalente pela afirmação de que $E(X) = 1$, para todo X maior ou igual a 2 (Dalpizol, 2018).

No início do século XXI, os estudos sobre a conjectura de Goldbach continuaram apresentando avanços importantes. Em 2002, Liu e Wang reduziram ainda mais o limite estabelecido em 1996, chegando a $10^{1.346}$, enquanto, em 2010, Lu obteve uma nova melhoria, determinando $\delta \approx 0,121$. Em 2012, Terence Tao demonstrou que todo número ímpar pode ser representado como a soma de, no máximo, cinco números primos. No mesmo ano, Oliveira e Silva verificaram computacionalmente que todos os números pares até $4 \cdot 10^{18}$ podem ser expressos como a soma de dois números primos. Embora esses resultados ainda não constituam uma demonstração geral da conjectura de Goldbach, eles representam avanços

expressivos tanto do ponto de vista teórico quanto computacional (Paiva, 2023).

Em 2014, o matemático Harald Helfgott apresentou uma demonstração da conjectura ternária (ou fraca) de Goldbach, segundo a qual todo número ímpar maior que 5 pode ser escrito como a soma de três números primos. O resultado representou um avanço significativo em relação aos trabalhos anteriores, especialmente ao de Vinogradov, que havia estabelecido a validade dessa representação apenas para números suficientemente grandes (Ramaré, 2015).

A estratégia de Helfgott retomou e aperfeiçoou técnicas desenvolvidas por Hardy, Littlewood e Vinogradov, utilizando principalmente o método do círculo, aliado a estimativas mais precisas sobre a distribuição dos números primos. A demonstração dividiu o estudo em diferentes regiões, denominadas arcos maiores, menores e intermediários, permitindo controlar de maneira mais eficiente as contribuições associadas aos números primos. Os resultados teóricos foram complementados por extensas verificações computacionais realizadas por David Platt e pelo próprio Helfgott, que confirmaram a representação de todos os números ímpares no intervalo necessário para completar a demonstração. Dessa forma, o trabalho estabeleceu que todo número ímpar maior que 5 é efetivamente a soma de três números primos, tornando-se um dos resultados mais importantes da Teoria dos Números no início do século XXI e solucionando definitivamente a versão ternária da conjectura de Goldbach (Ramaré, 2015).

Complementando, Helfgott empregou somas exponenciais envolvendo a função de von Mangoldt, além de funções de

suavização cuidadosamente escolhidas, permitindo obter estimativas mais precisas para a distribuição dos números primos. Nos arcos maiores, foram utilizadas estimativas relacionadas às funções (L) de Dirichlet e à distribuição dos primos em progressões aritméticas, possibilitando identificar um termo principal suficientemente grande. Já nos arcos menores, o desafio consistia em controlar as somas exponenciais e evitar perdas que poderiam comprometer a demonstração (Helfgott, 2014).

Para superar essa dificuldade, Helfgott combinou novas estimativas para somas exponenciais com a grande peneira (*large sieve*), ferramenta que permite obter limites mais eficientes para somas relacionadas aos números primos. Essa combinação reduziu significativamente os erros envolvidos e tornou possível estabelecer, de maneira explícita, que a contribuição dos arcos menores não poderia anular o termo positivo proveniente dos arcos maiores. Assim, o trabalho reuniu técnicas clássicas e resultados modernos da teoria analítica dos números, criando as condições necessárias para concluir a demonstração (Helfgott, 2014).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em síntese, entre o resultado de Chen Jingrun, em 1966, e a demonstração da conjectura fraca por Harald Helfgott, os estudos sobre a conjectura de Goldbach apresentaram avanços significativos, ainda que sem alcançar a demonstração da versão forte. Cerca de uma década após Chen, Montgomery e Vaughan demonstraram que a quantidade de números pares que não podem ser expressos como soma de dois primos cresce de forma relativamente pequena, introduzindo a ideia de um “conjunto excepcional”. Em 1980, Chengdong Pan e Chen obtiveram uma estimativa mais precisa

para essa exceção. Posteriormente, Chen e T. Z. Wang, em 1989, reduziram significativamente o limite a partir do qual os resultados poderiam ser considerados válidos. Em 1995, Ramaré demonstrou que todo número par maior que 2 pode ser representado como a soma de, no máximo, seis números primos. Esses resultados evidenciam um processo gradual de aproximação da conjectura, marcado pelo aperfeiçoamento das técnicas analíticas e pela redução progressiva das possibilidades de existência de contraexemplos.

Na década de 1990 e no início do século XXI, novos resultados ampliaram ainda mais esse percurso. Em 1997, Deshouillers, Effinger e te Riele demonstraram que a hipótese de Riemann implicaria a validade da conjectura fraca de Goldbach para todos os números ímpares, enquanto Hongze Li, em 2000, refinou as estimativas relacionadas ao conjunto excepcional. Em 2002, Liu e Wang reduziram novamente o limite dos números considerados nos resultados anteriores; em 2010, Lu obteve nova melhoria nas estimativas; e, em 2012, Terence Tao demonstrou que todo número ímpar pode ser representado como soma de, no máximo, cinco números primos. Ainda em 2012, Oliveira e Silva realizaram uma extensa verificação computacional da conjectura forte para números pares até 4×10^{18} .

Esse conjunto de avanços preparou o terreno para o trabalho de Helfgott, que demonstrou a conjectura ternária, estabelecendo que todo número ímpar maior que 5 é soma de três números primos. Sua estratégia combinou o método do círculo, estimativas refinadas sobre a distribuição dos primos e verificações computacionais, encerrando definitivamente a versão fraca da conjectura.

Por fim, as perspectivas futuras relacionadas à conjectura de Goldbach permanecem abertas e, ao mesmo tempo, desafiadoras. Embora os resultados analisados neste trabalho demonstrem avanços expressivos na compreensão do problema, especialmente aqueles obtidos por Chen Jingrun e Harald Andrés Helfgott, ainda não foi encontrada uma demonstração da conjectura forte, segundo a qual todo número par maior que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos. Nesse sentido, uma experiência pessoal de um dos autores relacionada ao desenvolvimento desta pesquisa contribui para ampliar essa reflexão. Em 11 de setembro de 2023, foi encaminhado ao professor Harald Helfgott um questionamento acerca das perspectivas de demonstração da conjectura e sobre a proximidade da comunidade matemática em relação a uma possível solução. Em resposta, enviada em 15 de dezembro de 2023⁹, Helfgott apresentou uma avaliação bastante cautelosa, afirmando: “*I feel that Goldbach is still far*” (“Sinto que Goldbach ainda está longe”). O matemático também destacou que, embora tenham ocorrido avanços significativos no século XXI em problemas como a conjectura dos primos gêmeos e a conjectura de Chowla, considerados durante muito tempo como problemas de dificuldade comparável à conjectura de Goldbach, ainda não é possível afirmar que tais progressos conduzirão necessariamente a uma demonstração da conjectura, uma vez que esses problemas podem ser, na realidade, um pouco mais acessíveis ou mesmo ter seus avanços interrompidos (Helfgott, comunicação pessoal, 2023).

Essa manifestação é particularmente relevante por partir de um matemático que esteve diretamente envolvido em um dos principais avanços contemporâneos relacionados ao problema. Sua avaliação permite compreender que a história da conjectura de Goldbach não deve ser interpretada como uma trajetória

necessariamente linear em direção a uma solução definitiva. Ao contrário, os resultados de Chen, Montgomery e Vaughan e Helfgott e de tantos outros pesquisadores revelam um processo contínuo de aproximações, no qual resultados parciais, métodos analíticos, estimativas cada vez mais precisas e verificações computacionais ampliam os limites do conhecimento sem, contudo, eliminar a dificuldade central da conjectura forte.

Assim, uma das principais perspectivas para pesquisas futuras consiste não apenas na busca direta por uma demonstração, mas também no desenvolvimento de novas ferramentas capazes de aprofundar a compreensão da distribuição dos números primos e de suas relações aditivas. Nesse cenário, a permanência da conjectura em aberto não representa um fracasso da Matemática, mas evidencia a própria natureza da investigação científica, ou seja, problemas formulados de maneira elementar podem permanecer durante séculos estimulando a criação de novas ideias, métodos e teorias. A resposta de Helfgott, portanto, reforça que, apesar dos extraordinários avanços acumulados, a demonstração da conjectura forte de Goldbach continua sendo uma perspectiva de longo prazo e um dos grandes desafios da Teoria dos Números.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BITENCOURT, C. da S. **A Conjectura de Goldbach e a Intuição Matemática**. 2018. 41 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal da Bahia (UFBA), Instituto de Matemática e Estatística, Salvador, 2018.

DALPIZOL, L. G. **O conjunto excepcional do problema de Goldbach.** 2018. 61 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do

GARIBALDI, E. Aproximações ao Problema de Goldbach. **Matemática Universitária**, n. 34, p. 19-33, jun. 2003.

HELFGOTT, H. A. **The ternary Goldbach conjecture is true.** arXiv, 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1312.7748>. Acesso em: 04 jul. 2026.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Christian Goldbach (1690–1764).** MacTutor History of Mathematics Archive. University of St Andrews, 2006. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goldbach/>. Acesso em: 07 jul. 2026.

PAIVA, C. D. C. **A busca pela prova da conjectura de Goldbach:** explorando suas conquistas. 2023. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal do Ceará (IFCE), Crateús, 2023.

RAMARÉ, O. **A sketch of H. Helfgott's proof of Goldbach's ternary conjecture.** 2015. Disponível em: <https://ramare-olivier.github.io/Maths/Helfgott-Ramare-2.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2026.

SOUSA, J. E. **Conjectura de Goldbach:** uma visão aritmética. 2013. 130 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2013.

Sul (UFRGS), Instituto de Matemática, Porto Alegre, 2018.

YUAN, W. **The Goldbach Conjecture**. 2. ed. Singapura: World Scientific, 2002. 344 p.

¹ Licenciado em Matemática. Instituto Federal do Ceará (IFCE). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

² Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática. Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

³ Especialista em Ensino da Matemática. Faculdade Descomplica (FD). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

⁴ Mestre em Matemática. Universidade Federal do Ceará (UFC). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

⁵ Mestra em Ensino de Física. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

⁶ Mestre em Física. Universidade Federal do Ceará (UFC). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

⁷ Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade de Passo Fundo (UPF). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

⁸ Mestre em Matemática. Universidade Federal do Ceará (UFC). E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#).

⁹ HELFGOTT, H. A. Comunicação pessoal, por e-mail, em 15 dez. 2023.