

ENSINO DE INTEGRAIS INDEFINIDAS PELO MÉTODO DE INTEGRAIS POR PARTES NA 12^a CLASSE: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

**TEACHING INDEFINITE INTEGRALS USING THE METHOD OF PARTIAL
INTEGRATION IN 12TH GRADE: A TEACHING PROPOSAL**

Ciências Exatas e da Terra • 23/08/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/787431508](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/787431508)

Veikuenda Nzolameso¹

Venâncio Sebastião Finda²

RESUMO

Este artigo apresenta uma proposta de resolução de exercícios que envolvem o cálculo de integrais indefinidas aplicando o método de integração por partes, dirigida aos alunos da 12^a Classe dos Cursos de Construção Civil, Eletricidade e Engenharia Informática do Instituto Médio Politécnico do Uíge em Angola. O estudo parte da constatação de que os manuais escolares apresentam poucos exercícios resolvidos e de que os alunos revelam fragilidades no domínio das regras de derivação, na definição de integral indefinida e na aplicação do método de substituição, o que compromete o desempenho na resolução de integrais pelo método de integração por partes. Assim, procurou-se responder à pergunta: como contribuir para o desenvolvimento das habilidades dos alunos e minimizar as dificuldades neste conteúdo? Defendeu-se a ideia de que a aplicação de uma proposta de resolução de exercícios contribui para esse desenvolvimento. Tratou-se de uma pesquisa aplicada, de abordagem quantitativa e qualitativa, explicativa, bibliográfica e de pesquisa-ação quanto aos procedimentos, com uma amostra de 129 alunos. Os dados foram obtidos por meio de um pré-teste e de um pós-teste, pela observação participante e pela entrevista estruturada aos professores, e analisados por meio de tabelas estatísticas. Os resultados do pós-teste evidenciaram uma melhoria substancial em relação ao pré-teste em todos os exercícios propostos, permitindo concluir que a proposta de resolução de exercícios, assentada na dedução da fórmula, na apresentação de passos claros e na sistematização de casos, contribuiu para o desenvolvimento das habilidades dos alunos na resolução de integrais indefinidas pelo método de integração por partes.

Palavras-chave: Cálculo de integrais indefinidas; Método de integração por partes; Resolução de exercícios; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This article presents a proposal for solving exercises involving the calculation of indefinite integrals using the method of integration by parts, aimed at 12th-grade students in the Civil Construction, Electrical, and Computer Engineering programs at the Uíge Polytechnic High School in Angola. The study is based on the observation that textbooks provide few worked examples and that students demonstrate weaknesses in mastering differentiation rules, the definition of indefinite integrals, and the application of the substitution method, which compromises their performance in solving integrals using the method of integration by parts. Thus, the study sought to answer the question: How can we contribute to the development of students' skills and minimize difficulties with this content? The study argued that the implementation of a proposed approach to solving exercises contributes to this development. This was an applied research study employing quantitative and qualitative, explanatory, and literature review methods, as well as action research procedures, with a sample of 129 students. Data were collected through a pre-test and a post-test, participant observation, and structured interviews with teachers, and analyzed using statistical tables. The post-test results showed a substantial improvement compared to the pre-test in all proposed exercises, leading to the conclusion that the exercise-solving approach — based on deriving the formula, presenting clear steps, and systematizing cases — contributed to the development of students' skills in solving indefinite integrals using the method of integration by parts.

Keywords: Calculation of indefinite integrals; Method of integration by parts; Problem-solving; Mathematics education.

1. INTRODUÇÃO

A Matemática que se conhece no século XXI teve grande desenvolvimento graças ao empenho e à contribuição de vários matemáticos ao longo da história. Muitos dos conceitos matemáticos atuais devem-se, porém, às noções de números, formas e grandezas criadas pelas civilizações antigas, que desenvolveram mecanismos para facilitar as suas atividades em sociedade. A invenção do cálculo diferencial e integral é considerada um dos avanços mais significativos da história da Matemática, tendo possibilitado o estudo de praticamente todas as situações das atividades humanas conhecidas até hoje, graças a matemáticos como Kepler, Descartes, Fermat, Newton e Leibniz, entre outros, que conferiram rigor sistemático a uma das disciplinas mais estudadas no ensino superior.

O presente artigo decorre de uma pesquisa cujo tema é a proposta de resolução de exercícios que envolvem o cálculo de integrais indefinidas aplicando o método de integração por partes na 12^a Classe, dirigida aos alunos dos Cursos de Construção Civil, Eletricidade e Engenharia Informática do Instituto Médio Politécnico do Uíge, no ano letivo de 2021/2022. Tratando-se de um campo muito vasto o estudo dos métodos de resolução de integrais indefinidas, delimitou-se o trabalho apenas à resolução de integrais indefinidas aplicando o método de integração por partes.

O problema científico, entendido como o elemento central que sustenta e orienta toda estrutura de qualquer investigação científica (Canastra, Haanstra e Vilanculos, 2014), foi formulado nos seguintes termos: como contribuir para o desenvolvimento das habilidades dos alunos da 12^a Classe e minimizar as dificuldades que apresentam na resolução de exercícios que envolvem o cálculo de integrais indefinidas aplicando o método de integração por partes? Para

responder a essa questão, defendeu-se a ideia de que a aplicação de uma proposta de resolução de exercícios envolvendo o cálculo de integrais indefinidas aplicando o método de integração por partes contribui para o desenvolvimento das habilidades dos alunos da 12ª Classe e minimiza as dificuldades que eles apresentam neste conteúdo de ensino.

A justificativa desta pesquisa apoia-se, por um lado, no interesse pessoal do autor pelas disciplinas relacionadas com o Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvido ao longo da sua formação em Análise Matemática, e, por outro, nas insuficiências identificadas nos manuais de Matemática da 12ª Classe utilizados no Instituto Médio Politécnico do Uíge (Fazenda, 2007; Neves, 2013), nomeadamente: número reduzido de exercícios resolvidos e propostos de integrais indefinidas pelo método de substituição, que antecede o método de integração por partes; e inexistência de integrais indefinidas resolvidas que envolvam especificamente o método de integração por partes.

A essas insuficiências somam-se as dificuldades observadas nos alunos da 12ª Classe dos cursos referidos, relacionadas com: o fraco conhecimento das regras do produto e do quociente de derivadas de duas funções; o domínio insuficiente na determinação da derivada e da diferencial de uma função; o desconhecimento da definição e da interpretação geométrica de integral indefinida; a confusão entre integral indefinida e integral definida; e o domínio insuficiente na resolução de integrais imediatas e de integrais pelo método de substituição.

Definiu-se como objetivo geral aplicar uma proposta de resolução de exercícios envolvendo o cálculo de integrais indefinidas aplicando

o método de integração por partes. Como objetivos específicos, procurou-se: demonstrar a fórmula que facilita o processo de ensino-aprendizagem da resolução destes exercícios; apresentar passos que os alunos possam seguir para minimizar as suas dificuldades; demonstrar as técnicas usadas na resolução destes exercícios; e deduzir algumas fórmulas que são consequência do método de integração por partes.

A relevância deste estudo decorre, ainda, do fato de o cálculo integral integrar o currículo do ensino secundário angolano na área das ciências exatas, constituindo pré-requisito para a formação em cursos técnico-profissionais como Eletricidade, Construção Civil e Engenharia Informática, bem como para o ingresso em cursos superiores de Engenharia e de Ciências Exatas. As dificuldades observadas nesta fase de ensino tendem, por isso, a repercutir-se em etapas posteriores da formação académica dos alunos, o que reforça a pertinência de se investir em propostas didáticas que tornem a resolução de exercícios de integração por partes mais acessível e mais bem fundamentada, em vez de assente na simples memorização de fórmulas.

Para além desta introdução, o artigo está organizado em quatro seções: a fundamentação teórica, onde se discutem os conceitos de exercício e de cálculo integral e se apresentam os métodos de integração, com destaque para o método de integração por partes; a metodologia, que descreve o desenho da pesquisa, a amostra e os instrumentos de recolha de dados; os resultados e a discussão, onde se apresenta a proposta de resolução de exercícios e se analisam os dados do pré-teste e do pós-teste; e, por fim, a conclusão, com a síntese dos principais achados e algumas sugestões.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção apresenta os fundamentos teóricos que sustentam a resolução de exercícios que envolvem integrais indefinidas no ensino secundário, bem como a sistematização conceitual sobre o cálculo, na perspectiva de diferentes autores, garantindo a sustentabilidade científica desta pesquisa.

2.1. Resolução de Exercícios no Ensino de Matemática

Exercícios e problemas em Matemática constituem coisas diferentes. Segundo Massucato e Mayrink (2015), o exercício é uma atividade que conduz o aluno a utilizar um conhecimento matemático já aprendido, como a aplicação de um algoritmo ou de uma fórmula; sustenta-se num procedimento padrão sobre o qual o estudante já detém certo domínio ou tem memorizado o mecanismo resolutivo, servindo para consolidar e automatizar técnicas e habilidades. Os problemas, por seu turno, exigem reflexão, questionamento e tomada de decisão perante uma situação para a qual o aluno não dispõe de um algoritmo prévio que garanta a resolução, envolvendo a compreensão do problema, a criação de uma estratégia, a execução dessa estratégia e a revisão da solução.

Univali (2020) distingue, entre outros, os exercícios de conhecimentos numéricos, geométricos, de estatística e probabilidade, algébricos e algébrico-geométricos, sendo os de conhecimentos algébricos — categoria em que se insere o objeto desta pesquisa — caracterizados pela introdução de variáveis que representam números, resolvidos e simplificados por meio de fórmulas. Ainda segundo Univali (2020), a prática constante facilita a

superação de situações difíceis, recomendando-se a leitura atenta do enunciado e a verificação posterior do resultado obtido.

No que respeita ao papel do professor neste processo, Guimarães (1988, citado por Matos e Serrazina, 1996) sublinha que, na resolução de exercícios, é o professor quem os propõe, é a ele que se dirigem as respostas e é ele quem sanciona o resultado, cabendo-lhe criar desafios que estimulem o desenvolvimento de habilidades variadas. Oliveira (2020) reforça que o papel do professor é direccionar as suas ações para que o aluno possa construir o seu próprio conhecimento, provocando e promovendo situações de aprendizagem e colocando-se como parceiro do aluno nesse processo.

2.2. Evolução Histórica do Cálculo Diferencial e Integral

O cálculo diferencial e integral teve grande desenvolvimento no final do século XVII, sobretudo com os trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), cujos principais objetos de estudo são as derivadas e as integrais (Coxe, 2013). Sob o ponto de vista geométrico, a derivada está ligada ao problema de traçar a tangente a uma curva, e a integral ao problema de determinar a área de uma figura, tendo os trabalhos de Newton e Leibniz permitido ordenar e sintetizar as descobertas matemáticas produzidas ao longo do século XVII, sobretudo no campo da Análise (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020).

Curiosamente, o desenvolvimento histórico do cálculo processou-se em ordem inversa à que é habitualmente apresentada nos manuais escolares: surgiu primeiro o cálculo integral, ligado aos processos somatórios do cálculo de áreas, volumes e comprimentos, e só depois o cálculo diferencial, associado aos problemas de tangentes a

curvas e de determinação de máximos e mínimos de uma função (Eves, 1995, citado por Coxe, 2013). Anton, Bivens e Davis (2014) sistematizam quatro classes de problemas que motivaram o surgimento do cálculo: a determinação da reta tangente a uma curva; o cálculo da área, do comprimento e do volume de figuras arbitrárias; a obtenção de valores máximos e mínimos de uma grandeza; e a relação entre distância, velocidade e aceleração de um objeto em movimento.

Sobre o conceito de cálculo, Thomas (2002) afirma tratar-se “da matemática dos movimentos e das variações”; onde há movimento, crescimento ou forças variáveis produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada. Funili (2016) acrescenta que o cálculo diferencial e integral é dinâmico e trata de variação e de movimento, sendo considerado por muitos uma das grandes realizações do intelecto humano, o que explica a sua presença no currículo básico de cursos como Engenharias, Física, Química, Estatística e Ciências da Computação.

2.3. O Ensino-Aprendizagem das Derivadas na Matemática

O ensino e a aprendizagem constituem um binómio indissociável: são duas dimensões de um mesmo processo, entendido o ensino como a ação sistemática, ordenada e intencional de transmissão de conhecimentos e experiência, e a aprendizagem como resultante desta ação (Verde, 2019). Nessa perspectiva, Piletti (2004) distingue ensinar, enquanto transmissão de ideias, de aprender, enquanto processo de aquisição e assimilação consciente de novos padrões de perceber, ser, pensar e agir.

Quanto ao estudo específico das derivadas, Anton, Bivens e Davis (2014) observam que muitos fenômenos físicos envolvem grandezas que variam — a velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias numa cultura, a intensidade de um tremor de terra —, estando o estudo dessas taxas de variação intimamente relacionado com o conceito geométrico de reta tangente a uma curva. A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função $f'(x)$ tal que o seu valor em qualquer x pertencente ao domínio de f é dado pelo limite do quociente incremental quando o acréscimo Δx tende para zero, caso esse limite exista (Flemming e Gonçalves, 2006). Uma função diz-se derivável num ponto quando esse limite existe nesse ponto, e diferenciável quando é derivável em todo o seu domínio (Simmons, 1998).

Associado ao conceito de derivada está o de diferencial: chama-se diferencial da função $y = f(x)$ ao produto da sua derivada $f'(x)$ pelo acréscimo da variável livre, isto é, $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, o que equivale a $dy = f'(x)dx$ (Righetto e Ferraudo, 1981). Como observa Leithold (1994), junto com a fórmula da derivada há uma fórmula para diferencial, relação que se revela essencial para a compreensão do processo de integração, uma vez que o domínio das regras de derivação constitui pré-requisito indispensável para o cálculo de integrais.

Esta relação entre derivada e diferencial ganha particular relevância no contexto do método de integração por partes, apresentado adiante, uma vez que a própria fórmula deste método decorre diretamente da regra de derivação do produto de duas funções. Por essa razão, as dificuldades que os alunos da 12ª Classe evidenciam no domínio das regras de derivação — nomeadamente na derivação do produto e do quociente de funções, conforme identificado na introdução deste artigo — tendem a repercutir-se diretamente na

sua capacidade de aplicar corretamente a integração por partes, o que reforça a necessidade de, antes de introduzir este método, se proceder a uma revisão sistemática dos conteúdos de derivação e de diferenciação de funções.

2.4. Cálculo Integral

O cálculo integral e o cálculo diferencial são processos inversos. Assim como a derivada, a integral também é um dos conceitos mais importantes do Cálculo, e pode ser utilizada numa grande quantidade de aplicações (Funili, 2016). Bizelli e Barrozo (2009) explicam que, como processo inverso, o cálculo integral consiste em, conhecendo-se a derivada de uma função $f(x)$, encontrar a função primitiva (ou antiderivada) da qual ela provém, ou seja, encontrar uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para qualquer x no domínio de f .

2.4.1. Teorema Fundamental do Cálculo

O teorema fundamental do cálculo relaciona os conceitos de derivada e integral, permitindo calcular a integral de uma função a partir de uma sua primitiva (Brito, 2013). Enquanto o cálculo diferencial nasceu do problema da tangente, o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente distinto, o problema da área (Stewart, 2006). O teorema, desenvolvido por Newton e Leibniz, estabelece justamente a relação entre esses dois campos, provando que a diferenciação e a integração são processos inversos (Bizelli e Barrozo, 2009).

2.4.2. Primitiva e Integral Indefinida

Uma função $F(x)$ é chamada primitiva da função $f(x)$ num intervalo I se, para todo x pertencente a I , se verifica $F'(x) = f(x)$. Sendo $F(x)$ uma

primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada integral indefinida de $f(x)$ e é denotada por $\int f(x)dx = F(x) + C$ (Brito, 2013, p. 24-25). Chama-se integração ao processo que permite encontrar a integral indefinida de uma função (Stewart, 2006), decorrendo dessa definição que: (i) $\int f(x)dx = F(x) + C$ se e somente se $F'(x) = f(x)$; (ii) $\int f(x)dx$ representa uma família de funções, isto é, o conjunto de todas as primitivas da função integranda; (iii) a derivada de $\int f(x)dx$ é igual a $f(x)$. O símbolo $\int$ é chamado sinal de integração, $f(x)$ é a função a ser integrada e representa a variável em relação à qual se integra.

2.4.3. Propriedades das Integrais Indefinidas

Sejam f e g duas funções pertencentes a I de $\mathbb{R}$ e k uma constante; então $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$ e $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (Flemming e Gonçalves, 2006). Dessas duas propriedades decorre que a primitiva goza da linearidade, o que possibilita efectuar a primitiva por decomposição. Como sintetiza Funili (2016), o conceito de cálculo integral e a sua relação com o cálculo diferencial permitem o estudo de diferentes métodos de integração para lidar com a grande variedade de funções e situações que surgem ao longo da resolução de integrais.

Da definição de integral decorrem determinadas fórmulas de integrais imediatas, aplicáveis diretamente a partir da tabela de integrais e das propriedades de linearidade acima referidas. A título de exemplo, considere-se a integral $\int (3x^3 + 5x + \sqrt{x})dx$; aplicando as propriedades da soma e do produto por uma constante e, em seguida, a regra de potências da tabela de integrais imediatas, obtém-se:

$$\int (3x^3 + 5x + \sqrt{x})dx = 3 \int x^3 dx + 5 \int x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = (3x^4)/4 + (5x^2)/2 + (2x^{3/2})/3$$

De modo semelhante, integrais que envolvam somas de funções trigonométricas elementares, como $\int (7 \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$, resolvem-se por decomposição direta a partir da tabela, resultando em $7 \cdot \sec x - \cot g x + C$. Estas integrais imediatas constituem o ponto de partida para o estudo dos métodos de integração mais elaborados, entre os quais se destacam o método de substituição, o método de decomposição em frações parciais e o método de integração por partes, objecto central desta pesquisa.

2.5. Métodos de Integração

Nem todas as integrais indefinidas se resolvem por aplicação direta da tabela de integrais imediatas. Por essa razão, o cálculo integral dispõe de diferentes métodos, cada um adequado a determinadas classes de funções.

2.5.1. Método de Mudança de Variável Ou de Substituição

O método de integração por mudança de variável, ou método de substituição, consiste em introduzir uma nova variável que simplifica a integral original, sendo, segundo Stewart (2006), um dos caminhos mais importantes do cálculo de integrais indefinidas. Este método antecede, do ponto de vista didático, o estudo do método de integração por partes, e o seu domínio constitui pré-requisito para a correta aplicação deste último, na medida em que muitas das integrais auxiliares que surgem ao longo da integração por partes são resolvidas justamente por substituição.

2.5.2. Método de Decomposição em Frações Parciais

Uma função racional f é a razão de dois polinômios, $f(x) = P(x) / Q(x)$, sendo P e Q polinômios e o domínio de f constituído por todos os

valores de x tais que $Q(x) \neq 0$ (Stewart, 2006). Segundo Finda e Freitas (2021), a função racional é o quociente que resulta da divisão de dois polinômios entre si, com o polinômio do denominador diferente do polinômio nulo. A decomposição de uma função racional em frações mais simples está subordinada ao modo como o denominador $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis (Flemming e Gonçalves, 2006), distinguindo-se, essencialmente, os casos em que $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares distintos, em fatores lineares repetidos, e em fatores lineares combinados com fatores quadráticos irredutíveis não repetidos. Em qualquer dos casos, a integração da função racional decomposta reconduz-se, em geral, a integrais imediatas do tipo logarítmico ou do tipo arco-tangente.

2.5.3. Método de Integração por Partes

O método de integração por substituição não resolve todas as integrais, sendo necessário recorrer a outro método, chamado integração por partes. Segundo Macêdo (2013), o método de integração por partes baseia-se na derivada do produto. No cálculo integral, a integração por partes é, assim, um método que permite exprimir a integral de um produto de funções por meio de outra integral, podendo ser entendida como uma versão integrada da regra de derivação do produto.

Apoiando-se em Fleming e Gonçalves (2006), é possível deduzir a fórmula que sustenta o método. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis num intervalo I ; aplicando a regra de derivação do produto, tem-se:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

Integrando ambos os membros desta igualdade, obtém-se:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' dx - \int f'(x) \cdot g(x) dx \quad (1)$$

Como $\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = f(x) \cdot g(x)$, substituindo em (1) resulta:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx \quad (2)$$

Fazendo $u = f(x)$, pelo que $du = f'(x)dx$, e $v = g(x)$, pelo que $dv = g'(x)dx$, e substituindo em (2), obtém-se a fórmula do método de integração por partes:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (3)$$

expressão que é aplicada sempre que a função a ser integrada se apresenta como um produto de funções. Para resolver estas integrais, o método consiste basicamente em escolher parte do integrando para ser igual a u e a outra parte para ser igual a dv ; uma vez fixados u e dv , resta determinar du e v , aplicando em seguida a fórmula (Macêdo, 2013).

Anton, Bivens e Davis (2014, p. 492) sintetizam o objetivo principal do método nos seguintes termos:

Escolher u e dv para obter uma nova integral mais fácil de calcular do que a original. Em geral, não há regras imediatas e precisas para isso; é uma questão de experiência, que provém de muita prática. Uma estratégia que geralmente funciona é escolher u e dv de tal modo que u fique mais simples ao derivar, enquanto dv seja fácil de integrar para obter v .

Simmons (1998) reforça que o método de integração por partes funciona com frequência, quando todos os outros métodos falham, aplicando-se particularmente bem aos produtos de diferentes tipos de funções. Note-se, ainda, que a resolução de integrais por este método exige, com frequência, a combinação com outros métodos, nomeadamente a transformação da integral numa soma de integrais e o método de substituição, empregue no cálculo da primitiva v .

2.6. Avaliação Diagnóstica no Processo de Ensino-Aprendizagem

Para além da fundamentação matemática propriamente dita, este estudo apoia-se em pressupostos relativos à avaliação diagnóstica enquanto instrumento de acompanhamento do processo de ensino-aprendizagem. O inquérito por questionário, aplicado sob a forma de pré-teste e de pós-teste, constitui, segundo Fortin (2009), um meio rápido e económico de obter dados junto de um número elevado de sujeitos, permitindo captar o estado inicial de um grupo de alunos e compará-lo com a situação observada após a intervenção pedagógica. A comparação entre os dois diagnósticos é, deste modo, um procedimento amplamente utilizado em pesquisas de natureza explicativa, na medida em que permite identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenómenos (Gil, 2002), neste caso o desenvolvimento, ou não, das habilidades de resolução de integrais indefinidas pelo método de integração por partes. Contudo, como observa Amado (2013), não basta recolher os dados: é necessário organizá-los, analisá-los e interpretá-los à luz dos objetivos da pesquisa, o que é feito, no presente artigo, através da comparação sistemática entre as tabelas do pré-teste e do pós-teste.

3. METODOLOGIA

Esta seção apresenta o desenho metodológico da pesquisa, descrevendo as etapas percorridas para dar resposta à pergunta científica inicialmente formulada, bem como os procedimentos de recolha e de análise dos dados.

3.1. Modalidade da Pesquisa

Quanto ao objeto de estudo, trata-se de uma pesquisa científica, que, segundo Souza et al. (2013), usa o método científico, um conjunto de técnicas e processos utilizados pela ciência para formular e resolver problemas de aquisição objetiva do conhecimento de maneira sistemática. Quanto à natureza, é uma pesquisa aplicada, que objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos (Prodanov e Freitas, 2013).

Quanto à abordagem, a pesquisa é quantitativa, pelo emprego de instrumentos estatísticos na coleta e no tratamento dos dados (Zanella, 2013), e qualitativa, por considerar a relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito que não se traduz apenas em números (Prodanov e Freitas, 2013). Quanto aos objetivos, é explicativa, na medida em que procurou relacionar a causa-efeito entre a proposta de resolução de exercícios e o desenvolvimento de habilidades dos alunos, identificando os fatores que contribuem para a ocorrência dos fenômenos observados (Gil, 2002).

Quanto aos procedimentos, é uma pesquisa bibliográfica, por se apoiar em obras já existentes (Gil, 2002), e também uma pesquisa-ação, uma vez que permitiu o envolvimento ativo do pesquisador e do grupo-alvo no problema estudado, de modo cooperativo (Souza

et al., 2013). Quanto ao local de realização, é uma pesquisa de campo, desenvolvida no próprio Instituto Médio Politécnico do Uíge, local onde a problemática foi detectada, sem que o pesquisador tenha modificado as condições encontradas (Souza et al., 2013).

3.2. Etapas da Pesquisa

O desenvolvimento da pesquisa obedeceu a quatro momentos fundamentais. No primeiro, aplicou-se um guia de observação de aulas e uma entrevista estruturada aos professores de Matemática, com o objetivo de compreender como eram lecionadas as aulas sobre cálculo integral. No segundo, aplicou-se o diagnóstico inicial (pré-teste) para identificar o estado inicial das habilidades dos 129 alunos selecionados na resolução de integrais indefinidas pelo método de integração por partes. No terceiro momento, administraram-se quatro aulas relacionadas com os conteúdos objeto da proposta apresentada na seção seguinte. No quarto e último momento, aplicou-se o diagnóstico final (pós-teste), destinado a verificar o nível de compreensão e as habilidades adquiridas pelos alunos, validando assim a proposta de resolução de exercícios.

3.3. População e Amostra

Para a aplicação do inquérito por questionário, considerou-se uma população finita, composta por três professores e 194 alunos da 12^a Classe do Instituto Médio Politécnico do Uíge, distribuídos por três cursos: Eletricidade, Construção Civil e Engenharia Informática. Para a seleção dos alunos, recorreu-se à amostragem estratificada proporcional, por se tratar de três grupos distintos, definindo-se o curso como característica de estratificação, uma vez que este tipo de

amostragem se aplica quando as populações se dividem em subpopulações (estratos) (Costa, 2011; Ochoa, 2015). O tamanho da amostra foi calculado com base na fórmula estabelecida por Lopes (2003), assumindo um nível de confiança de 95% e uma margem de erro de 5%, com abscissa da normal padrão (score padronizado) de 1,96:

$$n = Z^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \cdot N / [d^2(N - 1) + Z^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}]$$

Substituindo os valores da população ($N = 194$), da proporção esperada ($\hat{p} = \hat{q} = 0,5$), da margem de erro ($d = 0,05$) e do score padronizado ($Z = 1,96$), obtém-se:

$$n = [(1,96)^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 194] / [(0,05)^2 \cdot (194 - 1) + (1,96)^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5] = 186,3176 /$$

Assim, no universo de 194 alunos, foram selecionados 129 alunos, distribuídos proporcionalmente pelos três cursos, conforme se apresenta na Tabela 1.

Tabela 1. Distribuição amostral

Curso	População	Proporção (66,5%)	Amostra
Eletricidade	65	43,225	43
Construção Civil	69	45,885	46
Engenharia Informática	60	39,9	40
Total	194	—	129

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a amostra dos professores, utilizou-se a amostragem intencional, por serem estes os docentes responsáveis pela classe

em referência, uma vez que o pesquisador se dirige intencionalmente a grupos de elementos dos quais deseja saber a opinião (Sampaio, Assumpção e Fonseca, 2018).

3.4. Métodos e Técnicas de Recolha de Dados

A coleta de dados é a fase da pesquisa em que se indaga a realidade e se obtêm dados pela aplicação de uma técnica (Barros e Lehfeld, 2007). Em função disso, a recolha de dados foi feita através de um questionário testado através de um pré-teste (Marconi e Lakatos, 2003), aplicado aos alunos de modo a considerar o seu estado inicial, e de um pós-teste, aplicado aos mesmos alunos, com o objetivo de averiguar o desenvolvimento de habilidades na resolução de integrais indefinidas pelo método de integração por partes. Optou-se pelo inquérito por questionário por se tratar de um meio rápido e pouco dispendioso de obter dados junto de um elevado número de sujeitos (Fortin, 2009), que permite estudar um fenómeno tal como ele ocorre e é socialmente representado num determinado momento (Dias, 1994).

Os dados recolhidos por questionário foram complementados pelo método de observação participante, entendida como a observação realizada a partir do comportamento dos alunos no ambiente da sala de aula, quando estão estudando (Fiorentini e Lorenzato, 2007), e pela técnica de entrevista estruturada dirigida aos professores de Matemática dos cursos inquiridos, cujas questões foram previamente formuladas e direcionadas, aproximando-se do questionário, embora conduzida pelo pesquisador (Barros e Lehfeld, 2007; Kudissadila, 2019).

3.5. Procedimento de Análise dos Dados

A análise dos dados constitui a parte fundamental da pesquisa, pois não basta recolher os dados, sendo necessário saber analisá-los e interpretá-los (Amado, 2013). Assim, os resultados do pré-teste e do pós-teste foram organizados em tabelas estatisticamente distribuídas, a partir dos quais se procedeu à apresentação, análise e discussão comparada dos dados obtidos pelos alunos inquiridos.

3.6. Proposta de Resolução de Exercícios

Sabe-se que o cálculo de integração por partes se efetua a partir da fórmula $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$, em que u e v são funções deriváveis. Para efetuar esta integração, é frequentemente necessária a combinação de vários métodos, nomeadamente a transformação da integral numa soma de integrais, a própria integração por partes e a mudança de variável ou método de substituição (Simmons, 1998). Nesta pesquisa, o cálculo de integrais indefinidas pelo método de integração por partes foi sistematizado em sete casos típicos, que se descrevem de seguida:

a) Produto de um polinômio com uma função exponencial, do tipo $\int P_n(x) \cdot e^{(ax \pm b)} dx$, para o qual se considera $u = P_n(x)$ e $dv = e^{(ax \pm b)} dx$;

b) Produto de uma função exponencial com uma função trigonométrica do tipo seno ou cosseno, do tipo $\int e^{(ax+b)} \cdot \text{sen}(cx+d) dx$ ou $\int e^{(ax+b)} \cdot \text{cos}(mx+n) dx$, para o qual se considera $u = e^{(ax+b)}$ e dv igual à função trigonométrica multiplicada por dx ;

c) Produto de um polinômio com uma função trigonométrica do tipo seno ou cosseno, do tipo $\int P_n(x) \cdot \text{sen}(ax \pm b) dx$ ou $\int P_n(x) \cdot \text{cos}(ax \pm b) dx$, para o qual se considera $u = P_n(x)$ e dv igual à função trigonométrica multiplicada por dx ;

d) Produto de um polinômio com uma função logarítmica, do tipo $\int P_n(x) \cdot \ln |ax + b| dx$, para o qual se considera $u = \ln |ax + b|$ e $dv = P_n(x)dx$;

e) Integrais de certas funções trigonométricas inversas, do tipo $\int \arcsen(ax + b)dx$, $\int \arccos(ax + b)dx$, $\int \arctg(ax + b)dx$, entre outras, para as quais se considera u igual à função trigonométrica inversa e $dv = dx$;

f) Produto de um polinômio com uma função irracional que envolve certas raízes quadradas, do tipo $\int P_n(x) \cdot \sqrt{(b^2 \pm ax')} dx$;

g) Produto de uma função polinomial com uma função trigonométrica inversa, do tipo $\int P_n(x) \cdot \arcsen(mx \pm n)dx$, entre outros casos análogos.

Para a resolução de uma integral indefinida aplicando o método de integração por partes, seguem-se quatro passos: (1º) dividir a função a ser integrada em duas partes, u e dv ; (2º) diferenciar u para obter du ; (3º) calcular $\int dv$ para obter v ; (4º) aplicar a fórmula de integração por partes, $\int u dv = u \cdot v - \int v du$. Estes passos, aplicados de forma sistemática, constituem o núcleo da proposta apresentada nos resultados desta pesquisa.

Refira-se, por fim, que os quatro momentos descritos no ponto 3.2 foram concebidos de modo a articular estes instrumentos entre si: o guia de observação de aulas e a entrevista estruturada aos professores permitiram caracterizar a prática letiva anterior à intervenção; o pré-teste possibilitou identificar objetivamente o ponto de partida dos alunos relativamente aos sete casos acima sistematizados; as quatro aulas de intervenção corresponderam à aplicação direta dos quatro passos e dos casos típicos junto dos alunos selecionados; e o pós-teste permitiu medir, em termos

quantitativos, o efeito dessa intervenção. Esta articulação entre instrumentos qualitativos e quantitativos é coerente com a natureza mista, quantitativa e qualitativa, assumida para esta pesquisa.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta, num primeiro momento, a aplicação prática da proposta de resolução de exercícios que envolvem o cálculo de integrais indefinidas pelo método de integração por partes, ilustrada com exercícios representativos dos diferentes casos sistematizados; num segundo momento, analisa e discute os resultados obtidos nos diagnósticos aplicados aos alunos, de modo a avaliar o impacto da proposta no desenvolvimento das suas habilidades.

4.1. Aplicação da Proposta: Exercícios Resolvidos

De seguida, apresentam-se exercícios resolvidos que ilustram a aplicação dos quatro passos descritos na seção anterior a diferentes casos de integrais indefinidas resolvidas pelo método de integração por partes, selecionados entre os exercícios trabalhados com os alunos durante a intervenção pedagógica. A seleção contempla sete casos distintos dos sistematizados na metodologia, de modo a demonstrar que os mesmos quatro passos — dividir o integrando em u e dv , diferenciar u , calcular a primitiva de dv e aplicar a fórmula $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ — se mantêm válidos independentemente da natureza das funções envolvidas, ainda que a complexidade das integrais auxiliares resultantes varie de caso para caso.

a) Produto de um polinômio com uma função exponencial

Calcule a integral: $\int (x^3 + 2x + 5) \cdot e^x \, dx$

Resolução: aplicando os passos estabelecidos, tem-se:

$$1^{\circ} \text{ passo: } u = x^3 + 2x + 5 \text{ e } e^{(3x+5)} dx$$

$$2^{\circ} \text{ passo: } du = (3x^2 + 2)dx$$

$$3^{\circ} \text{ passo: } v = \int e^{(3x+5)} dx = (1/3)e^{(3x+5)}$$

4° passo:

$$\int (x^3 + 2x + 5)e^{(3x+5)} dx = (1/3)(x^3 + 2x + 5)e^{(3x+5)} e^{(3x+5)} dx$$

Como a integral resultante ainda é um produto de um polinômio por uma função exponencial, o método é aplicado sucessivamente mais duas vezes, sobre $\int (3x^2 + 2)e^{(3x+5)} dx$ e sobre $\int xe^{(3x+5)} dx$, seguindo em cada caso os mesmos quatro passos. Substituindo os resultados parciais uns nos outros, obtém-se finalmente:

$$\int (x^3 + 2x + 5)e^{(3x+5)} dx = (x^3/3 - x^2/3 + 8x/9 + 37/27) \cdot e^{(3x+5)} + C$$

b) Produto de uma função exponencial com uma função trigonométrica do tipo cosseno

Calcule a integral: $\int e^{(3x+4)} \cdot \cos(-2x-7) dx$

Resolução: trata-se de um produto de uma função exponencial com uma função trigonométrica do tipo cosseno; aplicando os passos estabelecidos, tem-se:

$$1^{\circ} \text{ passo: } e^{(3x+4)} \text{ e } dv = \cos(-2x-7)dx$$

$$2^{\circ} \text{ passo: } du = 3e^{(3x+4)} dx$$

3º passo: $v = \int \cos(-2x - 7)dx = -(1/2)\sin(-2x - 7)$ [pelo método de substituição]

4º

passo

$$: \int e^{(3x+4)} \cos(-2x-7)dx = -(1/2)e^{(3x+4)} \sin(-2x-7) + (3/2) \int e^{(3x+4)} \sin(-2x-7)dx$$

Aplicando novamente o método de integração por partes à integral $\int e^{(3x+4)} \sin(-2x-7)dx$, com $e^{(3x+4)} dv = \sin(-2x-7)dx$, obtém-se $v = (1/2)\cos(-2x-7)$, pelo que:

$$\int e^{(3x+4)} \sin(-2x-7)dx = (1/2)e^{(3x+4)} \cos(-2x-7) - (3/2) \int e^{(3x+4)} \cos(-2x-7)dx$$

Substituindo esta expressão em (I) e isolando a integral procurada, chega-se ao resultado:

$$\int e^{(3x+4)} \cos(-2x-7)dx = (e^{(3x+4)} / 13) \cdot [3\cos(-2x-7) - 2\sin(-2x-7)] + C$$

Este exemplo ilustra o procedimento geral, válido para qualquer integral do tipo $\int e^{(ax+b)} \cos(mx+n)dx$, em que a aplicação repetida do método de integração por partes conduz a uma equação em que a própria integral procurada figura em ambos os membros, permitindo isolá-la algebricamente — técnica que os alunos identificaram, durante a intervenção, como uma das principais fontes de dificuldade antes da proposta.

c) Produto de um polinômio com uma função trigonométrica do tipo seno

Calcule a integral: $\int x^2 \cdot \sin(2x+7) dx$

Resolução: sabendo que a integral dada é o produto de um polinômio com uma função trigonométrica do tipo seno, aplicam-se os passos estabelecidos:

1º passo: $u = x^2$ e $dv = \sin(2x + 7)dx$

2º passo: $du = 2x dx$

3º passo: $v = \int \sin(2x + 7)dx = -(1/2)\cos(2x + 7)$ [pelo método de substituição]

4º passo (I): $\int x^2 \sin(2x + 7)dx = -(1/2)x^2 \cos(2x + 7) + \int x \cdot \cos(2x + 7)dx$

Aplicando de novo a integração por partes a $\int x \cdot \cos(2x + 7)dx$, com $u = x$ e $dv = \cos(2x + 7)dx$, obtém-se $v = (1/2)\sin(2x + 7)$, pelo que:

$$\int x \cdot \cos(2x + 7)dx = (1/2)x \cdot \sin(2x + 7) + (1/2)\cos(2x + 7) + C$$

Substituindo esta expressão em (I), chega-se ao resultado final:

$$\int x^2 \sin(2x + 7)dx = -(1/2)[x^2 \cos(2x + 7) - x \cdot \sin(2x + 7) - \cos(2x + 7)] + C$$

d) Função trigonométrica inversa elevada ao quadrado

Calcule a integral: $\int (\arcsen 2x)^2 dx$

Resolução: aplicando os passos do método de integração por partes, tem-se:

1º passo: $u = (\arcsen 2x)^2$ e $dv = dx$

2º passo: $du = [4 \cdot \arcsen(2x) / \sqrt{1 - 4x^2}] dx$

3º passo: $v = x$

4º passo: $\int (\arcsen 2x)^2 dx = x \cdot (\arcsen 2x)^2 - 4 \int [\arcsen(2x) / \sqrt{1 - 4x^2}] dx$

A integral resultante resolve-se pelo método de substituição, fazendo $t = \arcsen(2x)$, donde $dt = 2dx / \sqrt{1 - 4x^2}$; assim, $\int [\arcsen(2x) / \sqrt{1 - 4x^2}] dx = (1/2) \int t dt = t^2 / 4 = (\arcsen 2x)^2 / 4$. Substituindo este resultado na expressão anterior, obtém-se finalmente:

$$\int (\arcsen 2x)^2 dx = x \cdot (\arcsen 2x)^2 - (\arcsen 2x)^2 + C$$

e) Produto de um polinômio com uma função logarítmica

Calcule a integral: $\int (2x + 5) \cdot \ln |x^2 - 2| dx$

Resolução: aplicando os passos estabelecidos do método de integração por partes, tem-se:

1º passo: $u = \ln |x^2 - 2|$ e $dv = (2x + 5)dx$

2º passo: $du = [2x / (x^2 - 2)] dx$

3º passo: $v = \int (2x + 5)dx = x^2 + 5x$

4º passo: $\int (2x + 5) \ln |x^2 - 2| dx = (x^2 + 5x) \ln |x^2 - 2| - 2 \int [(x^3 + 5x^2) / (x^2 - 2)] dx$
(I)

A integral obtida no segundo membro de (I) é o quociente de dois polinômios em que o grau do numerador é superior ao do denominador. Efetuando a divisão polinomial, obtém-se um quociente inteiro somado a uma fração própria, que se decompõe em frações parciais pelo método descrito na fundamentação teórica, com denominador $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$. Resolvendo cada parcela, chega-se a:

$$\int [(x^3 + 5x^2) / (x^2 - 2)] dx = x^2 / 2 + 5x + [(2 + 5\sqrt{2}) / 2] \cdot \ln |(x + \sqrt{2}) / (x - \sqrt{2})| + C$$

Substituindo este resultado em (I), obtém-se finalmente:

$$\int (2x + 5) \ln |x^2 - 2| dx = (x^2 + 5x) \ln |x^2 - 2| - x^2 + 10x + (2 + 5\sqrt{2}) \cdot \ln |(x + \sqrt{2}) / (x -$$

f) Função irracional com radical do tipo raiz quadrada

Calcule a integral: $\int \sqrt{1-x^2} dx$

Resolução: antes de aplicar diretamente os quatro passos do método, multiplica-se e divide-se a integral dada por $\sqrt{1-x^2}$, o que permite decompor a integral original em duas integrais mais simples:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int [(1-x^2) / \sqrt{1-x^2}] dx = \int [1 / \sqrt{1-x^2}] dx - \int [x^2 / \sqrt{1-x^2}] dx$$

A primeira parcela é uma integral imediata, dada diretamente pela tabela de integrais: $\int [1 / \sqrt{1-x^2}] dx = \arcsen x + C_1$. Na segunda parcela, escrita como $\int [x \cdot x / \sqrt{1-x^2}] dx$, aplicam-se os quatro passos do método de integração por partes:

1º passo: $u = x$ e $dv = x / \sqrt{1-x^2} dx$

2º passo: $du = dx$

3º passo: $v = \int x / \sqrt{1-x^2} dx = -\sqrt{1-x^2}$ [pelo método de substituição, fazendo $t = 1-x^2$]

4º passo: $\int x^2 / \sqrt{1-x^2} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx + C_2$

Substituindo as duas parcelas na igualdade inicial, obtém-se uma equação em que a própria integral procurada figura nos dois membros, à semelhança do que sucedeu no exercício b), o que permite isolá-la algebricamente:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \arcsen x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + C \Rightarrow 2 \int \sqrt{1-x^2} dx = \arcsen x + x\sqrt{1-x^2} + C$$

donde resulta finalmente:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = [\arcsen x + x\sqrt{1-x^2}] / 2 + C$$

g) Produto de uma função polinomial com uma função trigonométrica inversa

Calcule a integral: $\int x^3 \cdot \arcsen(x^2) dx$

Resolução: nesta integral, o grau do polinômio (grau 3) é superior ao grau do argumento da função trigonométrica inversa, pelo que, antes de aplicar os quatro passos, decompõe-se o polinômio em duas partes, escrevendo $x^3 = x^2 \cdot x$, de modo que uma delas seja a derivada do argumento x^2 . Assim:

$$\int x^3 \cdot \arcsen(x^2) dx = \int x^2 \cdot [x \cdot \arcsen(x^2)] dx$$

1º passo: $u = x^2$ e $dv = x \cdot \arcsen(x^2) dx$

2º passo: $du = 2x dx$

Para calcular $v = \int x \cdot \arcsen(x^2) dx$, aplica-se o método de substituição, fazendo $t = x^2$, donde $x dx = (1/2)dt$; obtém-se $v = (1/2) \int \arcsen(t) dt = (1/2)[t \cdot \arcsen(t) + \sqrt{1-t^2}]$, ou seja, em termos de x :

$$v = (1/2)[x^2 \cdot \arcsen(x^2) + \sqrt{1-x^4}]$$

Aplicando a fórmula de integração por partes, obtém-se uma equação em que a integral procurada surge também no segundo membro, o que permite isolá-la algebricamente, tal como sucedeu nos exercícios anteriores:

$$2 \int x^3 \arcsen(x^2) dx = x^2 \cdot [(1/2)(x^2 \arcsen(x^2) + \sqrt{1-x^4})] - \int x \sqrt{1-x^4} dx$$

A integral auxiliar $\int x \sqrt{1-x^4} dx$ resolve-se pelo método de substituição, fazendo novamente $t = x^2$, resultando em $(x^2/4) \sqrt{1-x^4} + (1/4) \arcsen(x^2)$. Substituindo e simplificando, chega-se ao resultado final:

$$\int x^3 \cdot \arcsen(x^2) dx = (x^2/4) \cdot [x^2 \cdot \arcsen(x^2) + \sqrt{1-x^4}] - (x^2/8) \sqrt{1-x^4} - (1/8) \cdot ar$$

Este último exemplo, envolvendo o produto de um polinômio de grau superior com uma função trigonométrica inversa de argumento não linear, evidencia o passo adicional de decomposição do polinômio antes da aplicação do método, técnica que, segundo se observou durante a intervenção, constituiu a principal novidade da proposta relativamente à prática letiva anterior, que tendia a limitar-se aos casos mais simples.

Os sete exercícios resolvidos ilustram a versatilidade do método de integração por partes e evidenciam um traço comum às diferentes situações: a necessidade de combinar, em vários passos, o próprio método de integração por partes com o método de substituição e, nalguns casos, com o método de decomposição em frações parciais, o que reforça a importância de os alunos dominarem previamente estes conteúdos antecedentes, tal como identificado na fundamentação teórica. A sistematização dos sete casos apresentados na metodologia, associada à aplicação consistente dos quatro passos, revelou-se, ao longo da intervenção pedagógica, um instrumento eficaz para orientar os alunos na escolha adequada de u e de dv , reduzindo o número de tentativas mal sucedidas e o tempo de resolução.

4.2. Análise dos Diagnósticos Aplicados aos Alunos

Nesta seção, analisam-se os resultados dos testes diagnósticos aplicados aos 129 alunos da 12ª Classe do Instituto Médio Politécnico do Uíge, compostos por quatro exercícios cada, relacionados com os quatro casos exemplificados na seção anterior.

Diagnóstico inicial (pré-teste)

O diagnóstico inicial foi aplicado antes da intervenção pedagógica, com o objetivo de analisar o nível inicial de habilidade dos alunos na resolução de exercícios envolvendo integrais indefinidas pelo método de integração por partes. Os resultados obtidos estão sintetizados na Tabela 2.

Tabela 2. Resultados obtidos no diagnóstico inicial

Exercício	Certas (N°)	Certas (%)	Erradas (N°)	Erradas (%)	Tota
E1	45	35	84	65	129
E2	31	24	98	76	129
E3	55	43	74	57	129
E4	60	47	69	53	129

⚠ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/ensino-de-integrais-indefinidas-pelo-metodo-de-integrais-por-partes-na-12-classe-uma-proposta-didatica?noblockage>

Fonte: Dados da pesquisa.

Como mostra a Tabela 2, o número de respostas erradas foi superior ao de respostas certas nos quatro exercícios, com taxas de acerto

entre 24% e 47%, confirmando as dificuldades identificadas na introdução deste artigo.

Diagnóstico final (pós-teste)

O diagnóstico final foi aplicado aos mesmos 129 alunos após a administração das quatro aulas relacionadas com a proposta de resolução de exercícios, com o objetivo de analisar se houve desenvolvimento de habilidades. Os resultados obtidos estão sintetizados na Tabela 3.

Tabela 3. Resultados obtidos no diagnóstico final

Exercício	Certas (N°)	Certas (%)	Erradas (N°)	Erradas (%)	Tota
E1	121	94	8	6	129
E2	109	84	20	16	129
E3	123	95	6	5	129
E4	126	98	3	2	129

△ Esta tabela possui muitas colunas e foi cortada para impressão. Para visualizá-la completa, acesse o artigo original em: <https://revistatopicos.com.br/artigos/ensino-de-integrais-indefinidas-pelo-metodo-de-integrais-por-partes-na-12-classe-uma-proposta-didatica?noblockage>

Fonte: Dados da pesquisa.

Como mostra a Tabela 3, verificou-se uma inversão expressiva do padrão observado inicialmente, com taxas de acerto entre 84% e 98% nos quatro exercícios, o que evidencia que as atividades

desenvolvidas nas salas de aula, orientadas pela proposta apresentada, surtiram o efeito pretendido.

Análise comparativa

A comparação entre os dois diagnósticos aplicados aos 129 alunos da 12ª Classe dos Cursos de Eletricidade, Construção Civil e Engenharia Informática do Instituto Médio Politécnico do Uíge, sintetizada na Tabela 4, permite quantificar com precisão o impacto da proposta.

Tabela 4. Comparação dos resultados obtidos nos dois diagnósticos

Exercício	Certas — inicial	Certas — final	Acréscimo de acertos
E1	45 (35%)	121 (94%)	76 alunos (59 p.p.)
E2	31 (24%)	109 (84%)	78 alunos (61 p.p.)
E3	55 (43%)	123 (95%)	68 alunos (53 p.p.)
E4	60 (47%)	126 (98%)	66 alunos (51 p.p.)

Fonte: Dados da pesquisa.

Em todos os quatro exercícios, o número de respostas certas mais do que duplicou entre o diagnóstico inicial e o diagnóstico final, com acréscimos percentuais de acerto que variaram entre 51 e 61 pontos percentuais. O exercício E2, relativo ao produto de uma função exponencial com uma função trigonométrica — caso reconhecido pelos próprios alunos, durante as aulas, como o mais complexo, por exigir a aplicação repetida do método e a resolução de uma equação algébrica para isolar a integral procurada — foi, ainda assim, aquele que registrou o maior acréscimo relativo de acertos, o que sugere que a apresentação explícita dos quatro passos e a dedução

da fórmula, em vez da sua simples memorização, foram particularmente relevantes para os casos de maior dificuldade inicial, confirmando a ideia defendida nesta pesquisa e respondendo à pergunta científica que a orientou.

4.3. Discussão dos Resultados

Os resultados alcançados corroboram a afirmação de Simmons (1998) de que o método de integração por partes funciona com frequência, quando todos os outros métodos falham, desde que o aluno seja capaz de identificar corretamente qual das partes do integrando deve corresponder a u e qual deve corresponder a dv . A melhoria acentuada observada entre o pré-teste e o pós-teste sugere que essa capacidade de identificação não decorre apenas do conhecimento da fórmula, mas sobretudo da prática orientada por passos explícitos, o que está em linha com a recomendação de Anton, Bivens e Davis (2014) de que a escolha de u e dv é uma questão de experiência, que provém de muita prática.

Os dados reforçam, também, a importância do papel do professor enquanto mediador do processo, tal como descrito por Oliveira (2020): ao direcionar as suas ações para que o aluno construa o seu próprio conhecimento, o professor cria as condições para que este deixe de aplicar mecanicamente a fórmula e passe a compreender a lógica subjacente a cada caso, o que ajuda a superar a insuficiência de exercícios resolvidos identificada nos manuais escolares (Fazenda, 2007; Neves, 2013).

Importa, contudo, assinalar algumas limitações do estudo. A amostra, embora estatisticamente representativa da população de 194 alunos do Instituto Médio Politécnico do Uíge, circunscreve-se a

uma única instituição de ensino, o que recomenda cautela na generalização dos resultados a outros contextos escolares. Adicionalmente, o intervalo de tempo entre o pré-teste e o pós-teste foi relativamente curto, pelo que estudos futuros poderão beneficiar de um desenho longitudinal capaz de avaliar a retenção das habilidades desenvolvidas a médio e longo prazo, bem como de comparar diferentes estratégias de ensino deste conteúdo em outras unidades escolares do ensino secundário angolano.

4.4. Implicações Pedagógicas

Da análise conjunta da fundamentação teórica e dos resultados obtidos decorrem algumas implicações práticas para o ensino do cálculo integral na 12ª Classe. Em primeiro lugar, a dedução da fórmula $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ a partir da regra de derivação do produto, em vez da sua simples apresentação como resultado pronto, revelou-se um passo pedagogicamente relevante, na medida em que permite ao aluno compreender a origem do método e não apenas memorizá-lo, indo ao encontro da distinção estabelecida por Piletti (2004) entre ensinar como transmissão de ideias e aprender como processo de assimilação consciente.

Em segundo lugar, a sistematização dos sete casos típicos apresentados na metodologia mostrou-se um recurso útil para orientar a escolha de u e de dv , área em que, segundo Anton, Bivens e Davis (2014), não há regras imediatas e precisas. Ainda que essa sistematização não substitua a prática continuada recomendada pelos autores, ela reduz a incerteza inicial do aluno perante um novo exercício, funcionando como um ponto de partida a partir do qual a experiência se vai consolidando.

Em terceiro lugar, os resultados sugerem a conveniência de os manuais escolares de Matemática da 12^a Classe incluírem mais exercícios resolvidos sobre o método de integração por partes, cobrindo os diferentes casos aqui sistematizados, de modo a sanar a insuficiência identificada nos manuais atualmente autorizados (Fazenda, 2007; Neves, 2013). Por fim, a combinação entre a demonstração da fórmula, a apresentação de passos explícitos e a prática de exercícios variados mostrou-se mais eficaz do que a exposição isolada da fórmula seguida de exercícios repetitivos, estratégia que ainda predomina nas práticas letivas correntes, segundo a observação de aulas realizada nesta pesquisa.

5. CONCLUSÃO

A resolução de exercícios que envolvem integrais indefinidas pelo método de integração por partes constitui um dos conteúdos em que os alunos da 12^a Classe do Instituto Médio Politécnico do Uíge apresentam maiores dificuldades, fato confirmado tanto pela observação das aulas como pelos resultados do diagnóstico inicial. A partir das dificuldades identificadas, é possível concluir que, no processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo, os professores raramente partem da dedução da fórmula que sustenta o método, o que contribui para que os alunos memorizem procedimentos sem compreender a sua origem; que, na resolução das integrais, não são sistematicamente apresentados passos que os alunos possam seguir para minimizar as suas dificuldades; que as técnicas de escolha das partes u e dv não são suficientemente exploradas, limitando-se muitas vezes à aplicação mecânica da fórmula; e que os manuais escolares autorizados não aprofundam os exercícios sobre este método, o que agrava as dificuldades observadas.

Os resultados obtidos com a aplicação da proposta de resolução de exercícios, assente na dedução da fórmula, na apresentação de quatro passos claros e na sistematização de sete casos típicos, confirmam a ideia defendida nesta pesquisa. A comparação entre o diagnóstico inicial e o diagnóstico final revelou um acréscimo expressivo, entre 51 e 61 pontos percentuais, no número de respostas certas em todos os exercícios propostos, o que permite concluir que os objetivos traçados foram atingidos: a fórmula foi demonstrada, os passos para minimizar as dificuldades dos alunos foram apresentados e aplicados, as técnicas de resolução foram sistematizadas em casos típicos, e a proposta permitiu ainda deduzir fórmulas gerais para determinadas famílias de integrais, ampliando o repertório resolutivo dos alunos para além da simples aplicação isolada da fórmula.

Espera-se que este artigo possa contribuir positivamente para o processo de ensino-aprendizagem da resolução de exercícios que envolvem integrais indefinidas pelo método de integração por partes, fornecendo subsídios concretos para minimizar as dificuldades identificadas nos alunos do ensino secundário. Sugere-se que os professores de Matemática partam sempre da demonstração da fórmula antes de a aplicarem, que apresentem explicitamente os passos de resolução aos alunos, que diversifiquem as técnicas de escolha das partes da integral, e que os manuais escolares sejam revistos de modo a incluir mais exercícios resolvidos sobre este método. Sendo todo trabalho científico inacabado, espera-se, por fim, que este artigo sirva de estímulo a outros pesquisadores interessados em aprofundar o estudo do ensino do cálculo integral na educação secundária.

A convergência entre os diferentes instrumentos utilizados nesta pesquisa — o guia de observação de aulas, a entrevista aos professores e os testes diagnósticos aplicados aos alunos — reforça a consistência das conclusões alcançadas: a observação e a entrevista identificaram, na origem, um padrão de ensino pouco centrado na dedução da fórmula e na apresentação explícita de passos de resolução, ao passo que os testes diagnósticos quantificaram o efeito de uma intervenção pedagógica que corrigiu justamente essas lacunas, sustentando a recomendação de que propostas semelhantes sejam adotadas noutras turmas e instituições de ensino médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMADO, João. Manual de investigação qualitativa em educação. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1.

BARROS, Aidil J.; LEHFELD, Neide A. Fundamentos de metodologia científica. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

BIZELLI, Maria H.; BARROZO, Sônia. Cálculo para um curso de Química. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2009. v. 1.

BRITO, José C. O cálculo diferencial e integral como ferramenta interdisciplinar no ensino médio. Teresina: [s.n.], 2013.

CANASTRA, Fernando; HAANSTRA, Fabiano; VILANCULOS, Mário. Manual de investigação científica da Universidade Católica de

Moçambique. 1. ed. Beira: Instituto Integrado de Apoio à Investigação Científica, 2014.

COSTA, Paulo R. Estatística. Santa Maria: Colégio Técnico Industrial-UFSM, 2011.

COXE, Ivan C. Funções racionais na integração: da técnica e tecnologia à discussão de conteúdos básicos em um curso de licenciatura em matemática. Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2013.

DIAS, Maria I. O inquérito por questionário: problemas teóricos e metodológicos gerais. Porto: [s.n.], 1994.

FAZENDA, José A. Matemática 12^a classe. 1. ed. Luanda: Textos Editores, 2007.

FERREIRA, José F. Representação gráfica de funções logarítmicas na 11^a classe. Uíge: [s.n.], 2022.

FINDA, Venâncio S.; FREITAS, José Luiz Magalhães de. Estratégias metodológicas para o ensino do cálculo de integrais de funções racionais. Sumbe: [s. n.], 2021.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2007.

FLEMMING, Diva M.; GONÇALVES, Mírian B. Cálculo A: funções, limites, derivação e integração. 6. ed. Florianópolis: Revista e Ampliada, 2006.

FORTIN, Marie-Fabienne. Fundamentos e etapas do processo de investigação. Loures: Lusodidacta, 2009.

FUNILI, Marco A. História do cálculo diferencial e integral. São João del-Rei: UFSJDR, 2016.

GIL, Antônio C. Como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

KUDISSADILA, Elias M. Metodologia científica: dificuldades da pesquisa aplicada em Angola. 1. ed. Luanda: Viana, 2019.

LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LIBÂNEO, José C. Didática. São Paulo: Cortez, 2006.

LOPES, Luiz F. Apostila de estatística. Santa Maria: DE-UFSM, 2003.

MACÊDO, Marcos J. Cálculo II. Mossoró: Edufersa, 2013.

MARCONI, Marina de A.; LAKATOS, Eva M. Fundamentos de metodologia científica. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MASSUCATO, Mônica; MAYRINK, Eduardo D. Qual a diferença entre problema e exercício? 2015. Disponível em: <https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1504/qual-a-diferenca-entre-problrma-e-exercicio>. Acesso em: 13 ago. 2022.

MATOS, José M.; SERRAZINA, Maria de L. Didática da matemática. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MONTEIRO, Isabel I. A resolução de problemas no ensino de matemática. Guaratinguetá: [s.n.], 2015.

NEVES, Maria A. Matemática 12ª classe. Porto: Porto Editora, 2013.

OCHOA, Carlos. Amostragem probabilística: amostra estratificada. 2015. Disponível em: <https://www.nequest.com/blog/br/blog/br/amostragem-probabilistica>. Acesso em: 10 set. 2022.

OLIVEIRA, Gilson S. Metodologia do ensino de matemática: fundamentos teóricos e práticos. Uberlândia: [s.n.], 2020.

PILETTI, Cláudio. Didática geral. 23. ed. São Paulo: Ática, 2004.

PRODANOV, Cleber C.; FREITAS, Ernani C. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas de pesquisa do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Universidade Feevale, 2013.

RACHIDI, Mustapha; FREITAS, José L.; MONGELLI, Maria C. Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações. Campo Grande: UFMS, 2020.

RIGHETTO, Armando; FERRAUDO, Antônio S. Cálculo diferencial e integral. São Paulo: Ltda, 1981. v. 1.

SAMPAIO, Newton A.; ASSUMPÇÃO, Ariovaldo R.; FONSECA, Bruno B. Estatística inferencial. 1. ed. Belo Horizonte: Poisson, 2018.

SIMMONS, George F. Cálculo com geometria analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1998. v. 1.

SOUZA, Débora I.; MULLER, Diego M.; FRACASSI, Marcos A.; ROMEIRO, Sônia B. Manual de orientações para projetos de pesquisa. Novo Hamburgo: FESLSVC, 2013.

STEWART, James. Cálculo. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1.

THOMAS, George B. Cálculo. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002.

TUMELERO, Nádia. Como fazer o objetivo geral e objetivo específico e quais verbos utilizar. 2017. Disponível em: <https://blog.mettzer.com/diferenca-entre-objetivo-geral-e-objetivo-especifico>. Acesso em: 9 set. 2022.

UNIVALI. Exercícios de matemática: tipos, exemplos e níveis de dificuldade. 2020. Disponível em: <https://ead.univali.br/blog/exercicios-matematica>. Acesso em: 13 ago. 2022.

VERDE, Edna S. Didática e seu objeto de estudo. Piauí: Edufpi, 2019.

ZANELLA, Liane C. Metodologia de pesquisa. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2013.

¹ Licenciado pelo Instituto Superior de Ciências de Educação (ISCED-UÍGE) /ANGOLA

² Docente do Instituto Superior de Ciências de Educação (ISCED-UÍGE) /ANGOLA

