

A ÁLGEBRA DAS TRANÇAS E A TOPOLOGIA DOS INVARIANTES DE VASSILIEV

THE ALGEBRA OF BRAIDS AND THE TOPOLOGY OF VASSILIEV
INVARIANTS

Ciências Exatas e da Terra • 08/07/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/783133303](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/783133303)

Gabriel Herbert de Sousa Vasconcelos¹

RESUMO

Este artigo explora a formalização algébrica dos nós através da teoria de tranças, demonstrando como a topologia tridimensional pode ser compreendida rigorosamente dentro da teoria de grupos. Através dos geradores de Artin e dos Teoremas de Alexander e Markov, estabelecemos a correspondência formal entre nós e tranças fechadas, propiciando o uso do Traço de Markov para a construção de invariantes. Posteriormente, avança-se para o limite dos nós singulares, introduzindo os invariantes de Vassiliev e os diagramas de Gauss. O ferramental aqui estabelecido possui relevância direta nas formulações modernas de teorias de calibre e gravitação.

Palavras-chave: Teoria dos Nós; Invariantes de Vassiliev; Gravitação Quântica de Laços; Teoria de Chern-Simons; Topologia.

ABSTRACT

This article explores the algebraic formalization of knots via braid theory, demonstrating how three-dimensional topology can be rigorously understood within group theory. Through Artin generators and the Alexander and Markov theorems, we establish the formal correspondence between knots and closed braids, enabling the use of the Markov trace to construct invariants. Subsequently, the discussion extends to singular knots, introducing Vassiliev invariants and Gauss diagrams. The mathematical framework established here is directly relevant to modern formulations of gauge theories and gravitation.

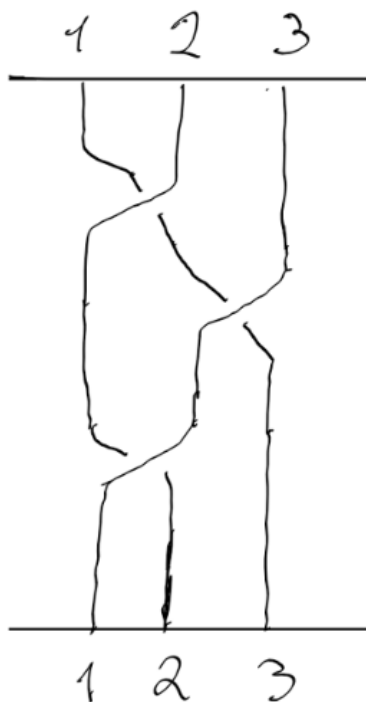
Keywords: Knot Theory; Vassiliev Invariants; Loop Quantum Gravity; Chern-Simons Theory; Topology.

1. INTRODUÇÃO ÀS TRANÇAS E O GRUPO DE ARTIN

Nós convencionais, munidos com a operação de soma conexa, não possuem estrutura de grupo invertível, o que torna complexo o seu manuseio sob uma perspectiva puramente algébrica. No entanto, podemos simplificar nós para outro objeto conhecido como trança. A grande vantagem dessa abordagem reside no fato de que os movimentos análogos aos de Reidemeister, quando aplicadas em tranças, formam uma álgebra estrita, o que pode ser entendido e manipulado dentro da teoria de grupos.

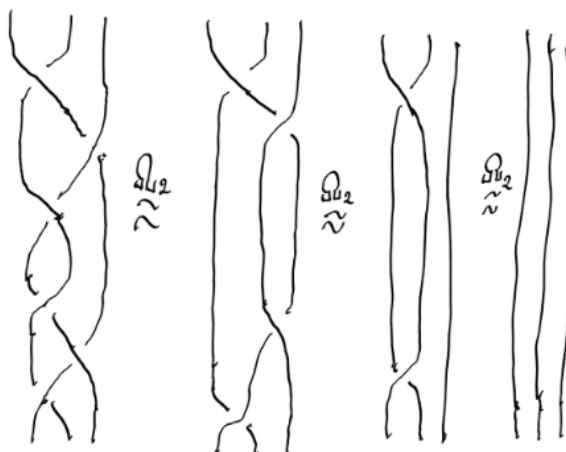
Definição 1 (Trança). *Tranças são objetos semelhantes aos nós no sentido topológico da sua descrição, ou seja, são objetos tridimensionais imersos em duas dimensões onde os diagramas se comportam de maneira equivalente. Cordas que se cruzam umas com as outras passam por baixo, e cordas contínuas passam por cima. No entanto, essas curvas não são fechadas, apenas contínuas e simples.*

Para formar uma trança, começamos com n pontos e n pontos antipodais dentro de um plano. Cada segmento de corda é conectado a um ponto arbitrário, fazendo cruzamentos com qualquer corda adjacente.



Trança com 3 cordas.

Dentro do diagrama de uma trança com n cordas, podemos realizar movimentos de Reidemeister para chegar a outra trança equivalente B_n^1 .



Tranças equivalentes.

Definição 2 (Palavras de Tranças). A *palavra de uma trança* é definida pela multiplicação de seus geradores σ_i , onde cada gerador representa um sobre cruzamento da corda i com a corda $i + 1$, e σ_i^{-1} representa um sobre cruzamento inverso da corda i com a corda $i + 1$.

$$\begin{array}{ccc}
\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_{n-1} \\
\diagdown | \dots | & | \diagup | \dots | & || \dots | \diagdown \\
\sigma_1^{-1} & \sigma_2^{-1} & \sigma_{n-1}^{-1} \\
\diagup | \dots | & | \diagdown | \dots | & || \dots | \diagup
\end{array}$$

Geradores da trança B_n .

Definição 3 (Grupo de Artin). *O conjunto de tranças com n cordas formam um grupo não-abeliano, chamado grupo de Artin ou grupo de tranças, onde os geradores obedecem às seguintes relações estritas* (kauffman2013?):

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2$$

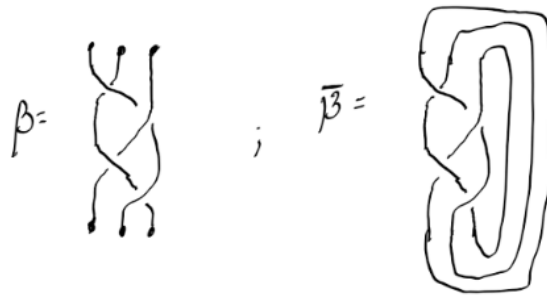
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1$$

As relações de Artin são o equivalente algébrico dos movimentos de Reidemeister no espaço bidimensional das cordas projetadas.

2. TEOREMAS DE ALEXANDER E MARKOV

Para utilizar a força algébrica do grupo de tranças na descrição de nós fechados no R^3 , é necessário um método formal para conectar as extremidades livres.

Definição 4 (Fecho da trança B). *Chamamos de fecho da trança B_n , denotado por \bar{B}_n , a conexão dos respectivos n pares de pontos antipodais por meio de cordas que conectam cada par de pontos. O fecho da trança gera um nó no R^3 .*

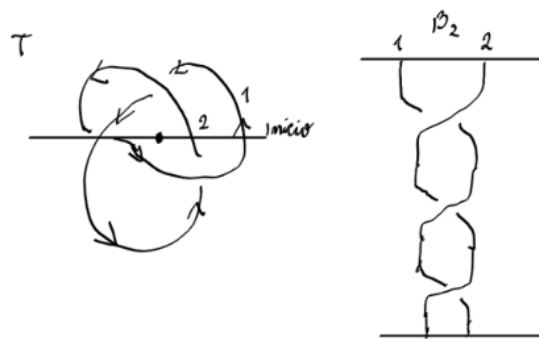


Fecho da trança $\overline{B_n}$.

A correspondência universal entre esses dois mundos topológicos é garantida pelo Teorema de Alexander.

Teorema 1 (Teorema de Alexander (kauffman2013?)). *Todo nó em R^3 é isotópico a um nó obtido pelo fecho da trança $\overline{B_n}$.*

Para obter uma trança a partir de um nó K , primeiro orienta-se o nó e define-se um ponto central de referência.



Obtendo a trança do nó Trifólio.

Dado que múltiplos elementos de B_n podem gerar nós isotópicos ao serem fechados, o Teorema de Markov estabelece as condições de equivalência. Dois nós obtidos por fechados de tranças são isotópicos se, e somente se, suas tranças originais estiverem conectadas por uma sequência de relações de Artin, conjugações algébricas, ou *Movimentos de Markov* ($\beta \rightarrow \beta\sigma_n^{\pm 1}$).

Através dessa ponte formal, invariantes orientados podem ser construídos utilizando o Lema do Traço de Markov:

$$J(K) = \alpha^{-\omega(B)} J_n(B)$$

onde $\omega(B)$ é a torção da trança (**kauffman2013?**).

3. NÓS SINGULARES E INVARIANTES DE VASSILIEV

Todo nó pode ser transformado no sem nó através de um número finito de inversões de cruzamentos. O interesse do invariante de Vassiliev é exatamente o momento em que a curva que representa o nó em R^3 se auto-intersecta.

Definição 5 (Nó Singular). *Um nó singular é uma imersão de S^1 em R^3 com n auto-intersecções transversais, onde as únicas singularidades são os pontos de auto-intersecções, definidos como pontos duplos.*

Um invariante V é classicamente definido como um invariante de Vassiliev se sua avaliação obedece à rigorosa relação de diferença:

$$V(K^*) = V(K^+) - V(K^-)$$

$$V(\text{Diagram with crossing}) = V(\text{Diagram with crossing}) - V(\text{Diagram with crossing})$$

Relação de 1 termo.

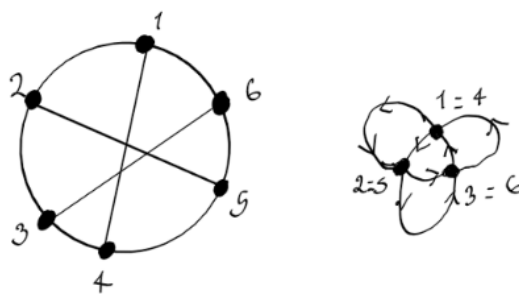
A relação de Vassiliev mostra como um ponto duplo pode ser representado através de uma soma de nós clássicos. Existe também a restritiva relação de 4 termos ($V(A) - V(B) + V(C) - V(D) = 0$), derivada da aplicação iterativa da relação de Vassiliev em diagramas vizinhos isotópicos.

$$V(\text{diagram 1}) - V(\text{diagram 2}) + V(\text{diagram 3}) - V(\text{diagram 4}) = 0$$

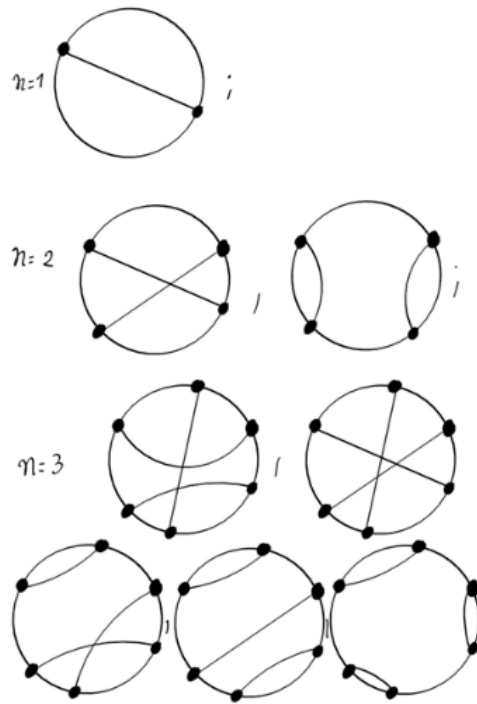
Relação de 4 termos.

Estes invariantes formam um espaço linear de dimensões infinitas. Define-se a ordem do invariante V como o número n tal que o invariante seja zero para qualquer nó singular com mais de n pontos duplos. O valor de V depende apenas da ordem em que passamos pelos pontos duplos e não da maneira como o nó clássico está entrelaçado (**prasolov1996?**). Para mapear essa ordem independentemente do emaranhamento espacial, empregam-se os Diagramas de Gauss.

Definição 6 (Diagramas de Gauss). *A partir do ponto inicial, desenham-se flechas no diagrama anti-horário e marca-se em um círculo cada ponto duplo por onde se passa. Em seguida, conectam-se por uma corda os pontos duplos marcados no círculo que correspondem aos mesmos pontos no diagrama original do nó singular.*



Diagramas de Gauss de um nó singular com 3 pontos duplos.



Diagramas de Gauss de ordem $n \leq 3$.

4. A CONEXÃO FÍSICA: TEORIA DE CHERN-SIMONS E A INTEGRAL DE WITTEN

Até o final da década de 1980, invariantes polinomiais (como o polinômio de Jones) e os grupos de tranças eram vistos primariamente como construções puramente matemáticas, derivadas de projeções bidimensionais e relações algébricas. O cenário mudou drasticamente quando Edward Witten (1989) demonstrou que o polinômio de Jones poderia ser compreendido de forma intrinsecamente tridimensional através da Teoria Quântica de Campos, especificamente utilizando a Teoria de Chern-Simons (**witten1989?**).

A Teoria de Chern-Simons é uma Teoria Quântica de Campos Topológica (TQFT) em três dimensões. A ação de Chern-Simons para um campo de calibre (uma conexão) A assumindo valores em uma álgebra de Lie (como $su(2)$), definida em uma variedade tridimensional M , é dada por:

$$S_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

onde k é uma constante de acoplamento (frequentemente chamada de nível da teoria, que deve ser um inteiro por razões de invariância de calibre grande) e Tr é o traço sobre os índices da álgebra de Lie. A característica mais profunda da ação S_{CS} é que ela independe da métrica do espaço-tempo; ela não faz referência a distâncias, tornando a teoria perfeitamente topológica.

Para conectar esta ação aos nós, introduz-se o conceito de *Laço de Wilson* (Wilson Loop). Fisicamente, o laço de Wilson representa a fase de Aharonov-Bohm não-abeliana adquirida por uma partícula de teste movendo-se ao longo de uma trajetória fechada. Topologicamente, se a trajetória da partícula descreve um nó K no espaço R^3 (ou S^3), o observável associado a esse nó é o traço da holonomia da conexão A ao longo de K :

$$W_R(K) = \text{Tr}_R(P \exp \oint_K A)$$

onde P denota a ordenação ao longo do caminho e R é a representação escolhida para o grupo de calibre.

A genialidade da formulação de Witten reside na avaliação do valor esperado do vácuo deste Laço de Wilson utilizando a integral de trajetória (integral funcional) de Feynman:

$$\langle W_R(K) \rangle = \int DAW_R(K) e^{iS_{CS}[A]}$$

Witten provou que, ao escolher o grupo de calibre $SU(2)$ na representação fundamental, o valor esperado $\langle W_R(K) \rangle$ é exatamente o Polinômio de Jones do nó K , avaliado em uma variável dependente do nível k . Essa descoberta monumental forneceu a primeira definição estritamente tridimensional para invariantes de nós,

libertando a teoria da necessidade de projetar os nós em diagramas bidimensionais.

4.1. Expansão Perturbativa e Diagramas de Gauss

A integral funcional de Witten também fornece o elo definitivo com os Invariantes de Vassiliev estudados na seção anterior. Quando a integral de trajetória (7) não pode ser calculada de forma exata, os físicos recorrem à expansão perturbativa em teoria de campos, expandindo o resultado em séries de potências do inverso da constante de acoplamento ($1/k$).

Ao calcular essa expansão usando diagramas de Feynman, as linhas dos propagadores do campo de calibre que conectam pontos ao longo do nó K correspondem visualmente e algebricamente às cordas internas desenhadas nos Diagramas de Gauss para nós singulares.

Foi demonstrado posteriormente por Maxim Kontsevich que os coeficientes dessa expansão perturbativa da integral de Chern-Simons são precisamente os invariantes de Vassiliev de ordem finita. As relações restritivas da teoria de campos, como a identidade de Jacobi para a álgebra de Lie, traduzem-se diretamente na topologia como a relação de 4 termos apresentada na Figura 7.

Desta forma, a teoria dos nós e a física de altas energias tornam-se indissociáveis. A álgebra das tranças e a topologia singular de Vassiliev fornecem o rigor matemático, enquanto a integral funcional de Witten e a teoria de Chern-Simons fornecem a fenomenologia geométrica que fundamenta teorias contemporâneas, incluindo modelos de Gravitação Quântica de Laços, onde os estados do espaço-tempo são quantizados

justamente através de redes de spin compostas por laços de holonomia.

5. CONCLUSÃO

Os invariantes de Vassiliev, avaliados sobre os grafos derivados dos diagramas de Gauss (seguindo as restrições como a relação de 4 termos), resultam em invariantes que têm conexões estritas com álgebras de Lie. Este formalismo matemático, enraizado no grupo de tranças de Artin e nas equivalências de Markov, desempenha um papel crucial no contexto do laço de Wilson. Ele fornece a linguagem topológica para compreender como esses invariantes se relacionam com a integral funcional de Witten na física contemporânea (**kauffman2013?**).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KAUFFMAN, L. H. *Series on Knots and Everything*. 4. ed. Singapore: World Scientific, v. 53 (Knots and Physics), 2013.

PRASOLOV, V. V. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. Providence: American Mathematical Society, v. 154 (Translations of Mathematical Monographs), 1996.

WITTEN, E. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, v. 121, n. 3, p. 351-399, 1989.

¹ Formado em Bacharelado em Física na UNB desde 2020. Participei de projetos de extensão, incluindo Iniciação Científica, produção e apresentação de seminários sobre teoria dos nós no Grupo de Física Teórica e Matemática Aplicada.

