

FUNDAMENTOS
GEOMÉTRICOS DA TEORIA
DOS NÓS: DIAGRAMAS,
MOVIMENTOS DE
REIDEMEISTER E
INVARIANTES POLINOMIAIS

GEOMETRIC FOUNDATIONS OF KNOT THEORY: DIAGRAMS,
REIDEMEISTER MOVES, AND POLYNOMIAL INVARIANTS

Ciências Exatas e da Terra • 08/07/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/783132327](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/783132327)

Gabriel Herbert de Sousa Vasconcelos

RESUMO

Este artigo tem caráter pedagógico e apresenta os fundamentos matemáticos e geométricos da Teoria dos Nós. O foco central reside na transição da representação tridimensional para diagramas bidimensionais, explorando como os movimentos de Reidemeister garantem a isotopia entre nós. Estabelecemos as operações fundamentais e funções associadas, culminando na construção detalhada do Bracket de Kauffman e na sua relação intrínseca com o Polinômio de Jones, demonstrando a eficácia dos invariantes polinomiais na distinção topológica, como a detecção de quiralidade.

Palavras-chave: Teoria dos Nós; Movimentos de Reidemeister; Invariantes Polinomiais; Bracket de Kauffman; Polinômio de Jones.

ABSTRACT

This article is pedagogical in nature and presents the mathematical and geometric foundations of Knot Theory. The central focus lies in the transition from three-dimensional representations to two-dimensional diagrams, exploring how Reidemeister moves ensure isotopy between knots. We establish fundamental operations and associated functions, culminating in the detailed construction of the Kauffman bracket and its intrinsic relationship with the Jones polynomial, thereby demonstrating the effectiveness of polynomial invariants in topological distinction, such as the detection of chirality.

Keywords: Knot Theory; Reidemeister moves; Polynomial invariants; Kauffman bracket; Jones polynomial.

1. INTRODUÇÃO: DEFINIÇÕES E DIAGRAMAS

Um nó é exatamente aquilo com que as pessoas estão acostumadas, como nós em cadarços ou cordas, entre outros exemplos. O foco de

estudo do campo da matemática que estuda os nós é exatamente distinguir um nó específico dos outros. O que faz 2 nós quaisquer serem diferentes? Para estudar nós, é inviável ficar enlaçando um dado segmento de corda para cada nó que se deseja estudar. Por isso, introduzimos os chamados diagramas de nós, que são uma forma de representar estes objetos tridimensionais em um papel e obter informações que permitam a comparação.

Definição 1 (Nó). *Seja uma imersão do círculo S^1 em R^3 como qualquer aplicação contínua $f:S^1 \rightarrow R^3$ tal que nenhum par de pontos distintos do círculo seja mapeado no mesmo ponto do espaço. Um nó suave é definido como a imagem do círculo em R^3 sob uma imergência infinitamente diferenciável com diferencial não nulo:*

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \neq (0, 0, 0).$$

Definição 2 (Diagrama de Nós). *Um diagrama de um nó K é a projeção de uma curva suave, fechada e simples no R^3 em R^2 , onde é chamado de cruzamento, o pedaço da curva em R^2 onde um pedaço da curva passa transversalmente por outra parte. A informação sobre qual o pedaço de corda passa por cima de outro é representado pela continuidade do pedaço em questão, sendo que a parte contínua passa por cima.*

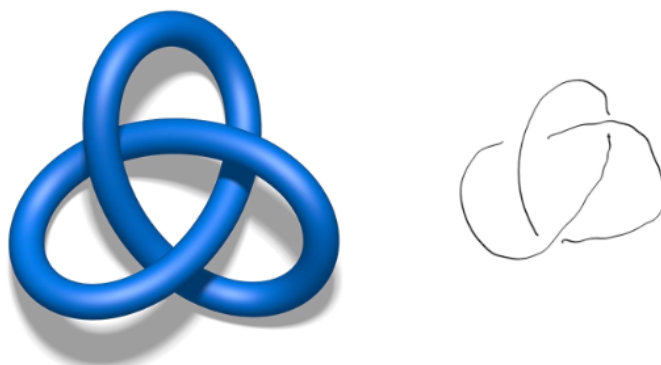
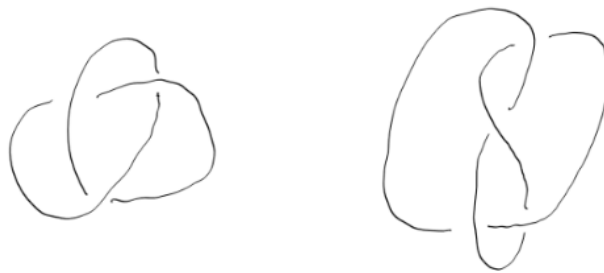


Diagrama do nó Trifólio.

Definição 3 (Sem Nó). *O nó mais simples possível, é o chamado Sem Nó, onde o diagrama dele não possui cruzamentos, i.e é uma corda que não possui nós.*



Sem Nó(O)



Nó Figura 8(E).

2. TABELA DE NÓS, ISOTOPIA E MOVIMENTOS DE REIDEMEISTER

Para o estudo de nós, podem existir diferentes tipos com diferentes números de cruzamentos. Assim como há uma tabela periódica, existe também uma tabela de nós que são conhecidos por serem diferentes e são desenhadas com o menor número possível de cruzamentos.

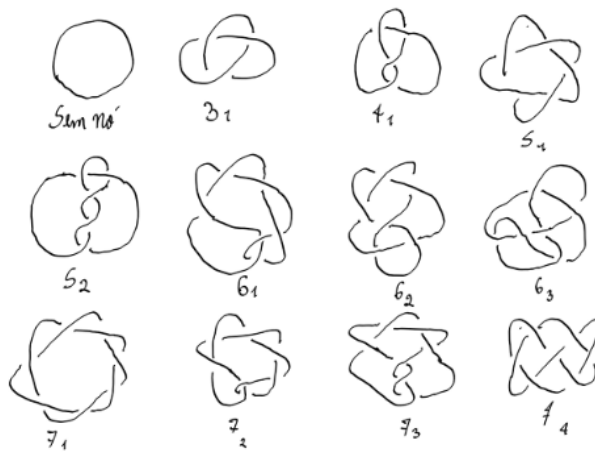
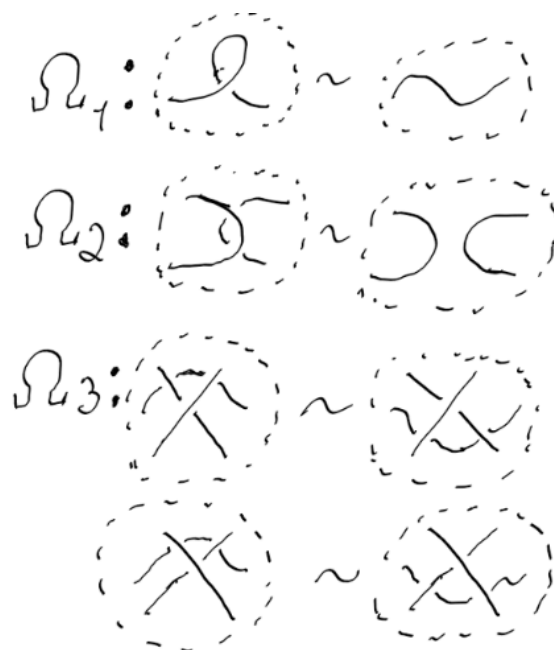


Tabela de Nós.

Definição 4 (Isotopia). *Dois nós suaves K_0 e K_1 são chamados equivalentes se existir uma família uniparamétrica $f_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, de difeomorfismos que depende suavemente do parâmetro t , levando o nó K_0 ao nó K_1 , ou seja, tal que f_0 é a identidade e $f_1(K_0) = K_1$.*

A Isotopia entre dois nós é o cerne da teoria dos nós. No entanto, no estudo dos nós, não usamos as curvas do \mathbb{R}^3 , mas sim suas projeções no \mathbb{R}^2 . Portanto, uma melhor definição de isotopia é dada pelos movimentos de Reidemeister.



Movimentos de Reidemeister.

Teorema 1. *Um nó K é isotópico a um nó K' se e somente se existirem uma aplicação de uma sequência finita de movimentos de Reidemeister que transforme o diagrama de K em K' .*

3. OPERAÇÕES E FUNÇÕES

3.1. Operações de Orientação e Soma Conexa

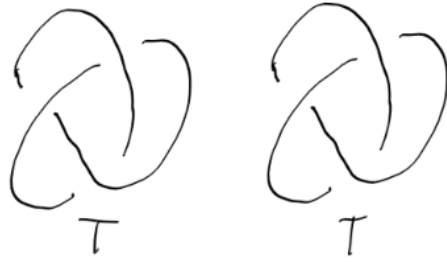
A fim de simplificar o estudo da isotopia entre dois nós, é necessário definir certas operações que se tornarão importantes no estudo de invariantes.

Definição 5 (Orientação). *A orientação de um dado nó K começa com a escolha de um ponto arbitrário dentro dele e a definição de uma direção. Em seguida, desenham-se flechas ao longo de todo os segmentos conectados ao nó.*

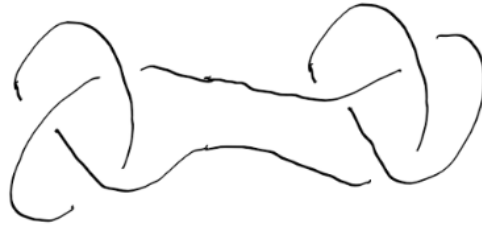


Nó Trifólio com uma certa orientação.

Definição 6 (Soma Conexa). *Define-se $K_1 \# K_2$ como a soma conexa de dois nós, onde cada nó é cortado em um pedaço arbitrário e os pedaços cortados são então unidos, mantendo a orientação original.*



$T \# T$:



Soma Conexa.

Podemos também somar nós através da soma desconexa, realizada como a soma dos diagramas tal que os dois sejam disjuntos, i.e, não possuem cruzamentos ou cordas em comum.



$T \cup T$:



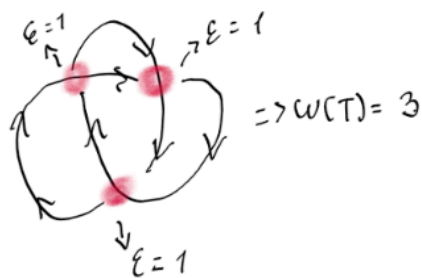
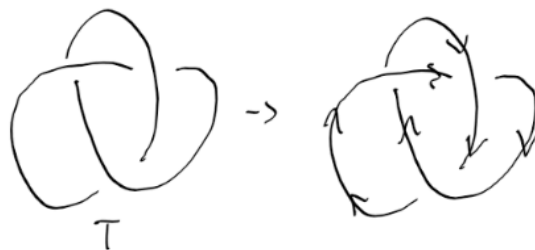
Soma desconexa.

3.2. Funções de Torção e Espelhamento

Definição 7 (Torção de K). *Seja um nó K orientado, a torção de K é definida como $\omega(K) = \sum_{\rho=1}^n \epsilon(\rho)$, onde aplica-se a regra da mão direita para verificar a orientação do cruzamento.*

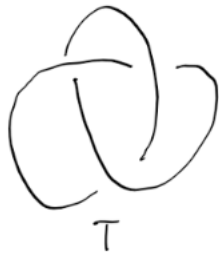


Valores de ϵ .



Calculo da torção do nó Trifólio.

Definição 8 (Espelho e Quiralidade). Define-se o espelho de K , $M(K)$, como a reversão de todos os seus cruzamentos. Um nó é chamado de *chiral* se $M(K)$ for isotópico ao nó original K , caso contrário, o nó é *achiral*.

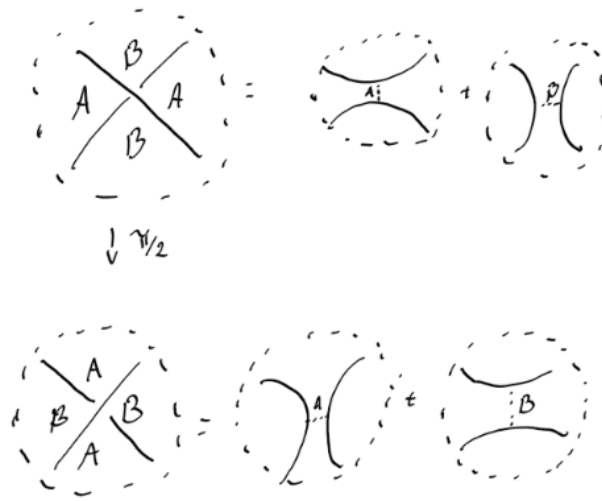


Espelho do nó Trifólio.

4. INVARIANTES POLINOMIAIS E O BRACKET DE KAUFFMAN

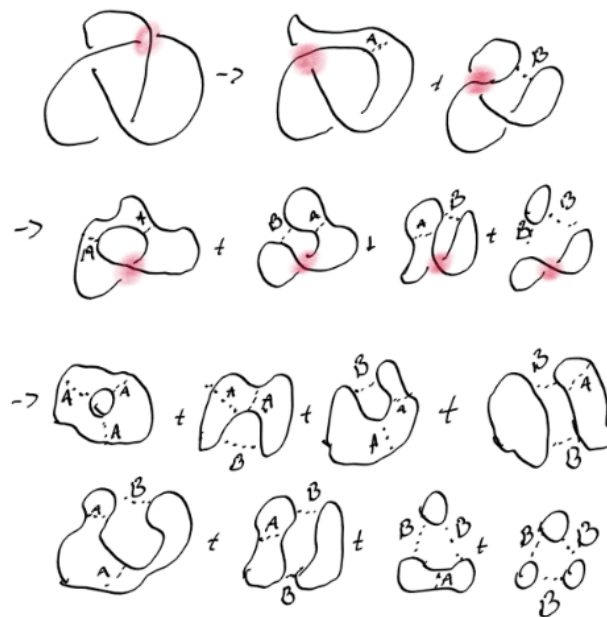
À medida que o número de cruzamento aumenta, encontrar uma sequência de movimentos de Reidemeister se torna um problema complexo. Surge a necessidade de encontrar invariantes que não dependam dos movimentos iterativos. Queremos construir uma função $f: K_n \rightarrow \mathcal{A}$ que seja invariante. Uma forma de eliminar um cruzamento é através da suavização.

Definição 9 (Suavização). *Seja um cruzamento qualquer de um nó não orientado K . A suavização relaciona o cruzamento original a dois diagramas associados ao nó original por uma multiplicação de uma variável.*



Suavização.

Aplicando a suavização em todos os cruzamentos do nó K , obtemos uma coleção de curvas de Jordan.



Suavizando o nó Trifólio.

Assim, o Bracket de Kauffman é definido através da formula:

$$\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle d^{||\sigma||}$$

Onde $d = -A^2 - A^{-2}$. Esta quantidade é invariante para os movimentos Ω_2 e Ω_3 , mas não para Ω_1 . Para obter um mapa

invariante sob o movimento Ω_1 , construímos o Bracket de Kauffman normalizado:

$$L_K(A) = (-A^3)^{\omega(K)} \langle K \rangle$$

Este invariante polinomial é capaz de detectar a quiralidade. Para obter o polinômio de Jones a partir do Bracket de Kauffman, basta fazer uma mudança de variável onde $A \rightarrow q^{-\frac{1}{4}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\emptyset) &= 1 \\ q^{-1} \mathcal{J}(\overline{\times}) - q \mathcal{J}(\times) &= (q^{1/2} - q^{-1/2}) \mathcal{J}(S^1) \\ \mathcal{J}(K \cup \emptyset) &= -(q^{-1/2} + q^{1/2}) \mathcal{J}(K) \end{aligned}$$

Definição diagramática do Polinômio de Jones.

5. CONCLUSÃO

Os invariantes polinomiais, construídos a partir da intuição geométrica da suavização e normalizados através das propriedades de torção e orientação, demonstram ser ferramentas rigorosas para distinguir nós matemáticos onde as ferramentas de isotopia direta falham.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COWARD, A.; LACKENBY, M. An upper bound on Reidemeister moves. *arXiv preprint arXiv:1104.1882*, 2011.

KAUFFMAN, L. H. *Series on Knots and Everything*. 4. ed. Singapore: World Scientific, v. 53 (Knots and Physics), 2013.

MANTUROV, V. O. *Knot Theory*. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.

PRASOLOV, V. V. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. Providence: American Mathematical Society, v. 154 (Translations of Mathematical Monographs), 1996.