

ÁLGEBRA LINEAR  
APLICADA À TOPOLOGIA  
QUÂNTICA: ESTRUTURAS  
BILINEARES, MATRIZES DE  
ADJACÊNCIA E  
INVARIANTES ESPECTRAIS  
PARA COMPUTAÇÃO  
ROBUSTA

LINEAR ALGEBRA APPLIED TO QUANTUM TOPOLOGY: BILINEAR  
STRUCTURES, ADJACENCY MATRICES, AND SPECTRAL INVARIANTS FOR  
ROBUST COMPUTING

Ciências Exatas e da Terra • 01/05/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/777626641](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/777626641)

---

Emerson Charles do Nascimento Marreiros<sup>1</sup>

Esrom José Galvão do Nascimento<sup>2</sup>

Wallace Sales Cardoso Gomes<sup>3</sup>

---

## RESUMO

Este artigo investiga a aplicação da álgebra linear na análise de propriedades topológicas de sistemas quânticos. Propomos o uso de formas bilineares e matrizes de adjacência como ferramentas para identificar conexões topológicas entre estados quânticos. A abordagem demonstra que invariantes espectrais derivados dessas estruturas, notadamente o winding number para sistemas 1D e o número de Chern para sistemas 2D podem ser utilizados para desenvolver qubits topológicos resistentes a ruído e algoritmos quânticos que exploram propriedades globais da matéria quântica. São discutidos fundamentos teóricos, metodologia analítica, implementação computacional e implicações práticas para computação quântica robusta, com ênfase nos modelos SSH (Su-Schrieffer-Heeger) e de Haldane como casos paradigmáticos.

**Palavras-chave:** Álgebra Linear; Topologia Quântica; Formas Bilineares; Matrizes de Adjacência; Número de Chern; Winding Number; Modelo SSH; Modelo de Haldane; Qubits Topológicos.

## ABSTRACT

This article investigates the application of linear algebra in the analysis of topological properties of quantum systems. We propose the use of bilinear forms and adjacency matrices as tools to identify topological connections between quantum states. The approach demonstrates that spectral invariants derived from these structures notably the winding number for 1D systems and the Chern number for 2D systems can be used to develop noise-resistant topological qubits and quantum algorithms that exploit global properties of quantum matter. Theoretical foundations, analytical methodology, computational implementation, and practical implications for robust quantum computing are discussed, with emphasis on the SSH (Su-Schrieffer-Heeger) and Haldane models as paradigmatic cases.

**Keywords:** Linear Algebra; Quantum Topology; Bilinear Forms; Adjacency Matrices; Chern Number; Winding Number; SSH Model; Haldane Model; Topological Qubits.

## 1. INTRODUÇÃO

A computação quântica fundamenta-se na álgebra linear para representar estados, operações e medidas. Vetores em espaços de Hilbert descrevem qubits; operadores unitários modelam portas quânticas; valores esperados são determinados por produtos internos. Entretanto, a fragilidade inerente de qubits físicos frente ao ruído ambiental (decoerência) impõe severas limitações práticas à escalabilidade dos computadores quânticos contemporâneos.

A topologia quântica emerge como alternativa promissora para garantir robustez contra perturbações locais. Nessa abordagem, a informação quântica é codificada em invariantes globais do sistema, quantidades que permanecem inalteradas sob deformações contínuas do Hamiltoniano, enquanto a estrutura de gap não feche. Tais invariantes têm caráter discreto (inteiros) e são, portanto, imunes a erros analógicos contínuos, conferindo proteção topológica intrínseca.

Este trabalho propõe uma abordagem sistemática e computacionalmente acessível: traduzir toda a fenomenologia da topologia quântica para a linguagem de matrizes e formas bilineares. A conexão central reside no fato de que o Hamiltoniano de qualquer sistema quântico discreto (rede cristalina, cadeia de spins, circuito de Josephson) é matematicamente equivalente à matriz de adjacência (ponderada e possivelmente complexa) de um grafo. Invariantes topológicos emergem então como propriedades

algébricas dessa matriz: sinais de determinantes, fases de números complexos integrais de formas bilineares.

São estudados em detalhe dois modelos paradigmáticos: a cadeia SSH (Su-Schrieffer-Heeger), o isolante topológico 1D mais simples, caracterizado pelo winding number; e o modelo de Haldane, o primeiro isolante de Chern sem campo magnético externo, com topologia ditada pelo número de Chern 2D. Em ambos os casos, mostramos que todos os cálculos reduzem-se a álgebra linear elementar — autovalores, autovetores, determinantes e traços sem necessidade de topologia diferencial explícita.

## 2. DO SISTEMA FÍSICO AO GRAFO

Todo sistema quântico discreto admite uma representação como grafo  $G = (V, E)$ , onde os vértices codificam os graus de liberdade quânticos e as arestas codificam as interações permitidas.

Formalmente, os elementos do grafo são definidos como:

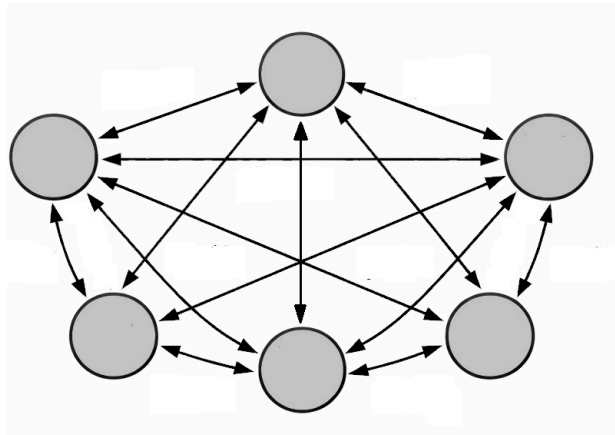
- **Vértices V:** representam estados de base  $|i\rangle$ , como sítios em uma rede cristalina, orbitais atômicos ou modos de circuito;
- **Arestas E:** representam transições permitidas ou amplitudes de acoplamento (hopping) entre estados distintos.

A matriz de adjacência  $A$  associada possui entradas  $A_{ij} = 1$  se existe acoplamento entre  $|i\rangle$  e  $|j\rangle$ , e  $A_{ij} = 0$  caso contrário. Para sistemas com hopping complexo — presente quando o sistema está sujeito a fluxo magnético ou quando simetrias de tempo são quebradas — generalizamos para:

$$A_{ij} = t_{ij} \cdot e^{i\varphi_{ij}}$$

onde  $t_{ij}$  é a amplitude de hopping (real positiva) e  $\varphi_{ij}$  é a fase de Peierls associada ao campo magnético ou à quebra espontânea de simetria de reversão temporal. Essa fase complexa nas entradas da matriz de adjacência é precisamente o ingrediente que gera topologia não trivial em sistemas 2D, como demonstrado pelo modelo de Haldane.

A dualidade grafo-sistema quântico possui consequências profundas: teoremas de teoria espectral de grafos (conectividade, espectro de Laplaciano, número cromático) adquirem interpretação física direta como estrutura de bandas, gap de energia e fases topológicas.



**Figura 1:**  $G(V,E)$ :  $E$  = vértice (Estados Quânticos  $|\varphi\rangle$ ) e Arestas (Acoplamento  $t_{ij} \cdot e^{i\varphi_{ij}}$ )

### 3. FORMAS BILINEARES COMO HAMILTONIANOS EFETIVOS

O Hamiltoniano tight-binding de qualquer sistema na segunda quantização é uma forma bilinear no espaço de Hilbert, expressível em termos de operadores de criação e aniquilação:

$$H = \sum_{ij} H_{ij} |i\rangle\langle j|, \quad H_{ij} = \langle i | H | j \rangle$$

onde  $H_{ij}$  define a forma bilinear associada à matriz  $H$ . As propriedades de simetria de  $H$  determinam a classe topológica do sistema segundo a tabela periódica de Altland-Zirnbauer:

**Tabela 1:** Classes de Altland-Zirnbauer e seus invariantes topológicos.

Simetria	Propriedade de H	Classe A-Z	Invariante
Rev. Temporal	H real simétrica	AI	$\mathbb{Z}_2$
Quiral	H anticomuta com $\Gamma$	AIII	Winding $\nu \in \mathbb{Z}$
Part.-Buraco	$H = -\Xi H^T \Xi^{-1}$	D/C	$\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$
Sem simetria esp.	H hermitiana geral	A	Chern $C \in \mathbb{Z}$

A matriz de adjacência  $A$  aparece como caso especial:  $H = t A$  descreve elétrons saltando em uma rede com energia de hopping  $t$ . Os autovalores de  $A$  fornecem diretamente a estrutura de bandas do sistema. Essa correspondência permite importar resultados de teoria espectral de grafos para física do estado sólido, e vice-versa.

## 4. INVARIANTES TOPOLÓGICOS A PARTIR DA ÁLGEBRA LINEAR

A topologia do sistema é extraída do espectro e dos autovetores de  $H$  sem recorrer a equações diferenciais. Os três invariantes topológicos mais importantes em dimensões baixas têm representações matriciais elegantes:

### 4.1. Número de Chern (C)

Para sistemas bidimensionais com simetria de reversão temporal quebrada, como isolantes de Hall quântico e o modelo de Haldane, o

número de Chern da n-ésima banda é:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} \Omega_n(k) d^2 k$$

onde  $\Omega_n(k) = i[\langle \partial_{k_x} u_n | \partial_{k_y} u_n \rangle - \langle \partial_{k_y} u_n | \partial_{k_x} u_n \rangle]$  é a curvatura de Berry, uma forma bilinear nos derivativos dos autovetores  $|u_n(k)\rangle$  de  $H(k)$ . Para sistemas de 2 bandas com vetor  $d(k) = (d_x, d_y, d_z)$ , a curvatura simplifica-se para:

$$\Omega(k) = \frac{1}{2 |d|^3} \cdot d \cdot (\partial_{k_x} d \times \partial_{k_y} d)$$

## 4.2. Invariante $Z_2$

Para isolantes topológicos com simetria de reversão temporal (como o modelo Kane-Mele e o bismuto/antimônio 3D), o invariante  $Z_2$  é definido pelo produto das paridades dos autovetores nos  $N$  pontos de alta simetria  $\{\Gamma_i\}$  da zona de Brillouin:

$$(-1)^{\nu} = \prod_{i=1}^N \frac{\text{Pf}[w(\Gamma_i)]}{\sqrt{\det[w(\Gamma_i)]}}$$

onde  $w_{mn}(k) = \langle u_m(k) | \Theta | u_n(-k) \rangle$  e  $\Theta$  é o operador de reversão temporal. Tudo se reduz a calcular sinais de Pfaffianos de matrizes antissimétricas, álgebra linear pura.

## 4.3. Índice de Witten (Winding Number)

O operador quiral é  $\Gamma = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Ele anticomuta  $H = \{H, \Gamma\} = 0$

O índice topológico também pode ser calculado por:

$$\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}[\Gamma Q]$$

Onde  $Q$  é o projetor sobre bandas ocupadas.

Para sistemas 1D quirais (cadeia SSH, poliacetileno), o índice topológico é:

$$\nu = \frac{1}{2} \text{sgn}[\det(h)]$$

onde  $h$  é o bloco fora da diagonal do Hamiltoniano na base quiral. Equivalentemente, como integral de fase:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_k [\arg(h(k))] dk$$

## 5. Exemplo Detalhado: Cadeia SSH via Álgebra Linear

A cadeia Su-Schrieffer-Heeger é o modelo canônico de isolante topológico 1D, proposto originalmente para explicar a condutividade elétrica do poliacetileno. Consiste em duas sub-redes A e B com hoppings alternados  $v$  (intracelular) e  $w$  (intercelular).

### 5.1. Decomposição em Matrizes de Pauli

Matriz de Pauli é qualquer matriz  $2 \times 2$  hermitiana e de traço zero. Assim:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz Hamiltoniana decorrente da matriz de Pauli é:

$$H(k) = \begin{bmatrix} 0 & d_x - id_y \\ d_x + id_y & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, temos o operador Hamiltoniano:

$$H(k) = d(k)\sigma = d_x \cdot \sigma_x + d_y \cdot \sigma_y + d_z \cdot \sigma_z$$

Por conta da simetria quiral ( $d_z = 0$ ), o Hamiltoniano decompõe-se como  $H(k) = d(k) \cdot \sigma$ . Para SSH (Su-Schrieffer-Heeger),  $d_z = 0$  por causa da simetria quiral. Temos:

$$\begin{aligned}d_x(k) &= v + w \cdot \cos(k) \\d_y(k) &= w \cdot \sin(k) \\d_z &= 0\end{aligned}$$

O vetor  $d(k) = (d_x, d_y)$  define uma curva paramétrica no plano complexo à medida que  $k$  percorre a zona de Brillouin  $[0, 2\pi]$ . O winding number conta quantas vezes essa curva envolve a origem:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d_x \partial_k d_y - d_y \partial_k d_x}{d_x^2 + d_y^2}$$

**Caso 1:** Trivial,  $v > w$

Exemplo:  $v = 1, w = 0.5$ .

O vetor  $d_x$  é sempre positivo pois  $v - w > 0$ .

A curva não envolve a origem. Resultado:  $= 0$ .

**Caso 2:** Topológico,  $v < w$

Exemplo:  $v = 0.5, w = 1$ . Quando  $k = \pi$ , temos  $d_x = 0.5 - 1 = -0.5$ .

O vetor  $d$  dá uma volta completa na origem. Resultado:  $= 1$ .

Esse é o invariante topológico. É inteiro e só muda se o gap fechar, ou seja quando  $v = w$ .

Resultado:  $\nu = 0$  se  $v > w$  (curva não envolve a origem);  $\nu = 1$  se  $v < w$  (curva envolve a origem).

## 5.2. Hamiltoniano e Estrutura de Bandas

No espaço de momentos, o Hamiltoniano  $2 \times 2$  é:

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & v + we^{-ik} \\ v + we^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

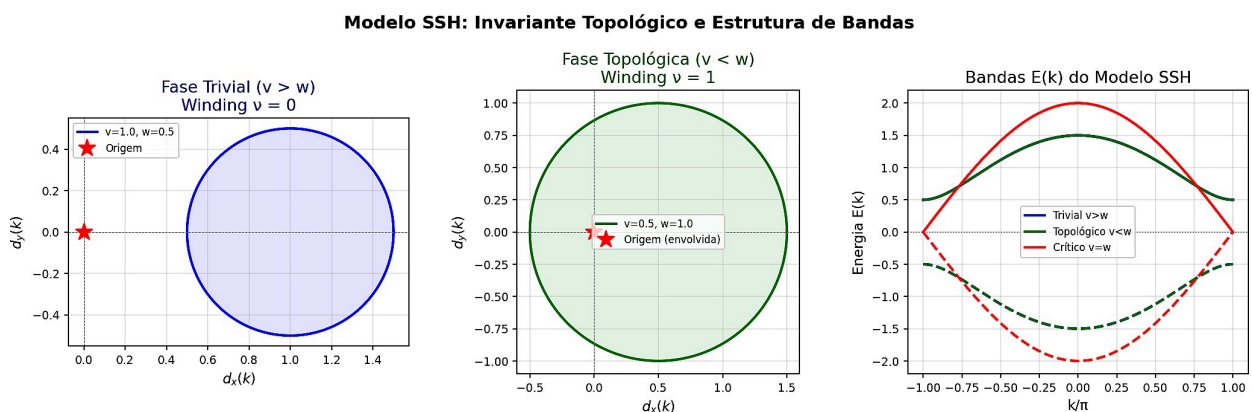
Esta é exatamente uma matriz de adjacência ponderada de um grafo bipartido. Os autovalores fornecem as bandas:

$$E_{\pm}(k) = \pm |v + we^{ik}| = \pm \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw \cdot \cos k}$$

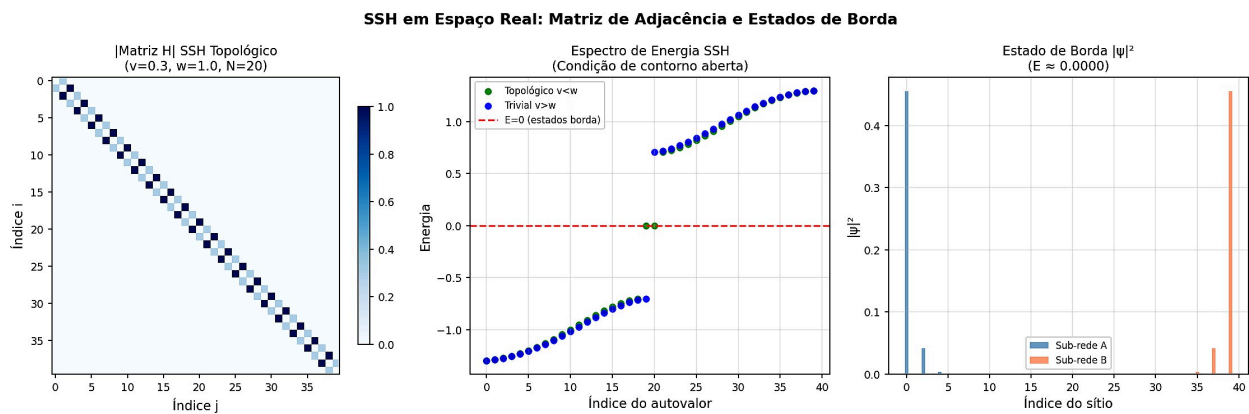
O gap fecha quando  $E = 0$ , ou seja  $|v + we^{ik}| = 0$ . Isso ocorre em  $k = \pi$  se e somente se  $v = w$ . Esse é o ponto de transição topológica entre a fase trivial ( $v > w$ ) e a fase topológica ( $v < w$ ).

### 5.3. Estados de Borda em Espaço Real

Para  $N$  células com condições de contorno abertas, a matriz de Hamilton é  $2N \times 2N$  tridiagonal literalmente a matriz de adjacência do grafo da cadeia. Quando  $v = 1$ , a diagonalização revela dois autovalores  $E \approx 0$  com autovetores localizados nos sítios 1 e  $2N$  (estados de borda). Esse é o princípio bulk-edge correspondence em forma matricial pura.



**Figura 2:** Curvas de winding  $d(k)$  no plano complexo e estrutura de bandas  $E(k)$  do modelo SSH.



**Figura 3:** Matriz  $|H|$  SSH, espectro de energia e estados de borda localizados ( $v=0.3$ ,  $w=1.0$ ,  $N=20$ ).

**Tabela 2:** Roteiro algorítmico do modelo SSH em álgebra linear pura.

Passo	Operação	Ferramenta Algébrica	Resultado Físico
1	Construir $H(k)$	Matriz de adjacência	Hopping $v, w$
2	Autovalores de $H(k)$	$\det(H - E I) = 0$	Bandas $E(k)$ e gap
3	Decomposição em Pauli	$H = d \cdot \sigma$	Vetor $d(k)$ no plano
4	Winding de $d(k)$	Integral de fase	Invariante $\nu = 0$ ou $1$
5	Diagonalizar $H_{\text{real}}$	Álgebra numérica	Estados de borda para $\nu = 1$

### 5.4. Condição de Contorno Aberta e Cálculo dos Estados da Borda Qui-rai

Condição de contorno aberta + estados de borda. É aqui que a topologia aparece fisicamente. Modelo de Haldane em fita: matriz de adjacência real + estados de borda.

A ideia: rede hexagonal finita na direção  $y$  e periódica em  $x$ . Isso dá uma fita infinita com duas bordas.

Diagonalizando a matriz grande, os estados de borda quirais aparecem no gap se  $C \neq 0$ .

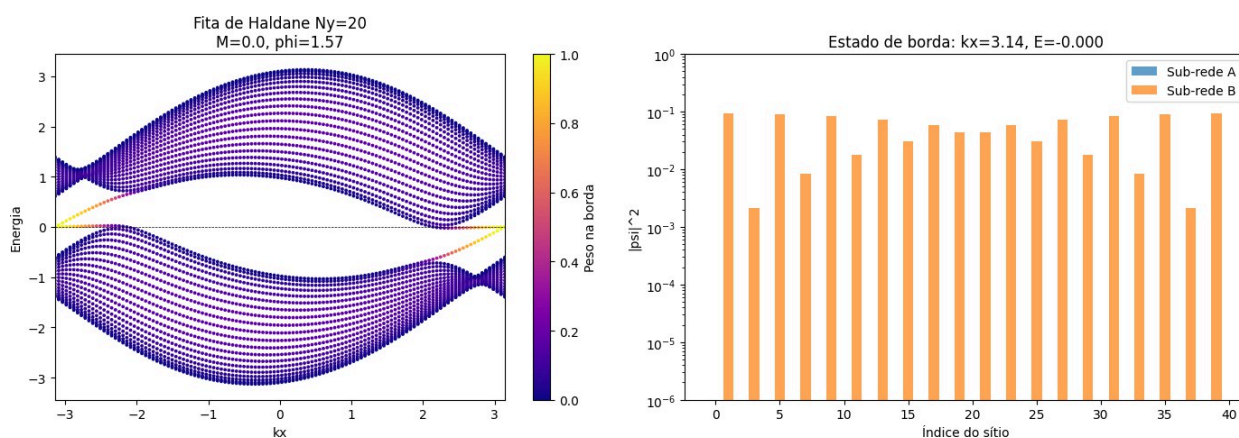


Figura 4: Rodando fase topológica  $C=+1$

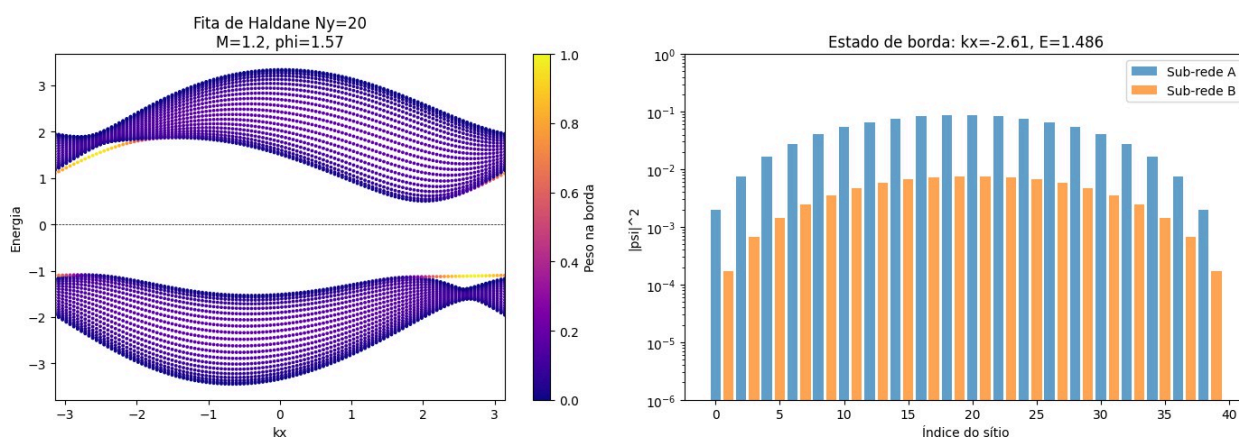


Figura 5: Rodando fase trivial  $C=0$

## 6. MODELO DE HALDANE: NÚMERO DE CHERN VIA MATRIZ DE ADJACÊNCIA

O modelo de Haldane (1988) foi o primeiro a demonstrar que um sistema pode exibir efeito Hall quântico sem campo magnético externo, um resultado inicialmente recebido com ceticismo e hoje considerado fundamental para a teoria da matéria topológica. A fase topológica surge da quebra de simetria de reversão temporal através de hoppings complexos de segundo vizinho.

### 6.1. Rede Hexagonal e Matriz de Adjacência Complexa

O modelo utiliza uma rede hexagonal (tipo grafeno) com duas sub-redes A e B. Os hoppings são:

- **Primeiros vizinhos:** hopping real  $t_1$  entre sub-redes A e B (grafeno comum);
- **Segundos vizinhos:** hopping complexo  $t_2 e^{i\varphi}$  entre sítios da mesma sub-rede, com sinal dependendo do sentido de travessia;
- **Massa de Semenoff M:** termo diagonal que quebra a simetria entre sub-redes. O Hamiltoniano no espaço  $k$  é  $H(k) = d_0 I + d \cdot \sigma$  com:

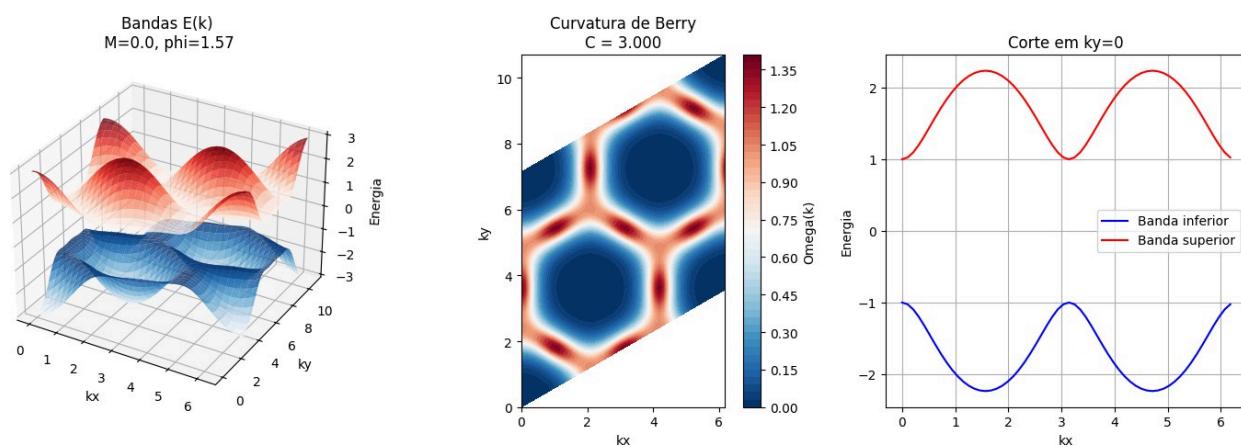
$$d_z(k) = M - 2t_2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \sum_l \sin(k \cdot b_l)$$

O termo crucial é  $d_z$ : sem a fase  $\varphi$ , o sistema é trivial. A fase complexa nas arestas de segundo vizinho da matriz de adjacência quebra reversão temporal e gera topologia não trivial.

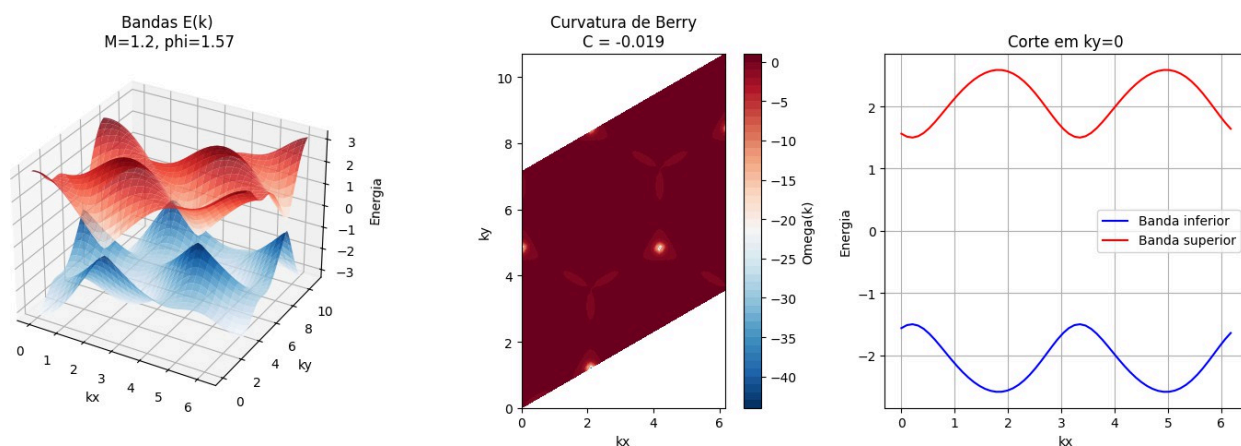
## 6.2. Números de Chern no Modelo de Haldane

Por meio da discretização da zona de Brillouin e da soma da curvatura de Berry, é possível construir representações gráficas que permitem analisar o comportamento dos números de Chern no modelo de Haldane. Essa abordagem fornece uma visualização clara da topologia do sistema, evidenciando como as propriedades geométricas e topológicas emergem a partir da estrutura eletrônica. Dessa forma, a análise não apenas facilita a compreensão dos mecanismos envolvidos, mas também contribui para a interpretação rigorosa dos fenômenos associados à fase topológica

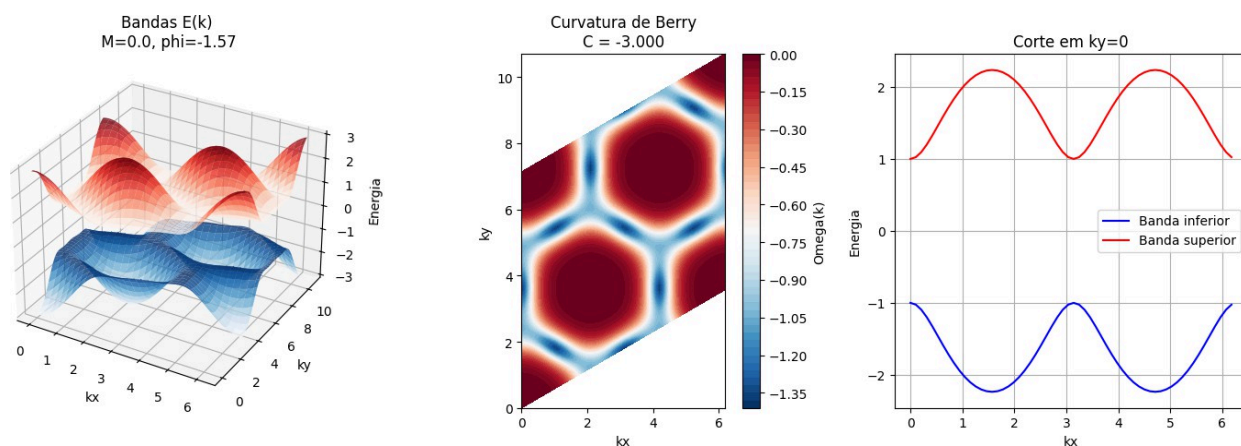
do modelo. Vamos plotar as bandas  $E(k)$  e a curvatura de Berry  $\Omega(k)$  na zona de Brillouin.



**Figura 6:** Bandas + Curvatura de Berry do Haldane - Calculando fase topológica



**Figura 7:** Bandas + Curvatura de Berry do Haldane - Calculando fase trivial



**Figura 8:** Bandas + Curvatura de Berry do Haldane - Calculando fase  $C = -1$  Os plots nos mostram:

- Gráfico 3D das bandas: Para  $M = 0$ ,  $\phi = \pi/2$ , o gap está aberto e as bandas não se tocam. Nos pontos  $K$  e  $K'$  a separação é mínima. Para  $M = 1.2$ , o gap é grande e trivial.

- Mapa de cor de  $\Omega(k)$ : Na fase topológica, a curvatura de Berry fica concentrada perto dos pontos  $K$  e  $K'$  com sinais opostos. A integral dessa função dá  $C \neq 0$ . Na fase trivial, as contribuições se cancelam e  $C=0$ .
- Corte 1D: Mostra o gap direto. Quando  $|M| = 3\sqrt{3}t_2|\sin(\varphi)| \approx 1.039$ , o gap fecha e reabre invertido ao cruzar a transição.

Relação com matriz de adjacência: Toda a física veio da função hamiltonian-haldane. Ela é a matriz de adjacência  $2 \times 2$  no espaço  $k$ . O parâmetro  $\phi$  é a fase nos hoppings de segundos vizinhos. Mude  $\phi = 0$  e  $C$  vira zero sempre, porque aí você recupera reversão temporal e a curvatura  $\Omega(k)$  fica identicamente nula.

A forma da curvatura de Berry usa só o vetor  $d$  e suas derivadas. É álgebra vetorial pura, sem precisar diagonalizar em cada passo, pois é mais rápido e estável. Assim acontece numericamente a fase topológica.

### 6.3. Número de Chern e Diagrama de Fases

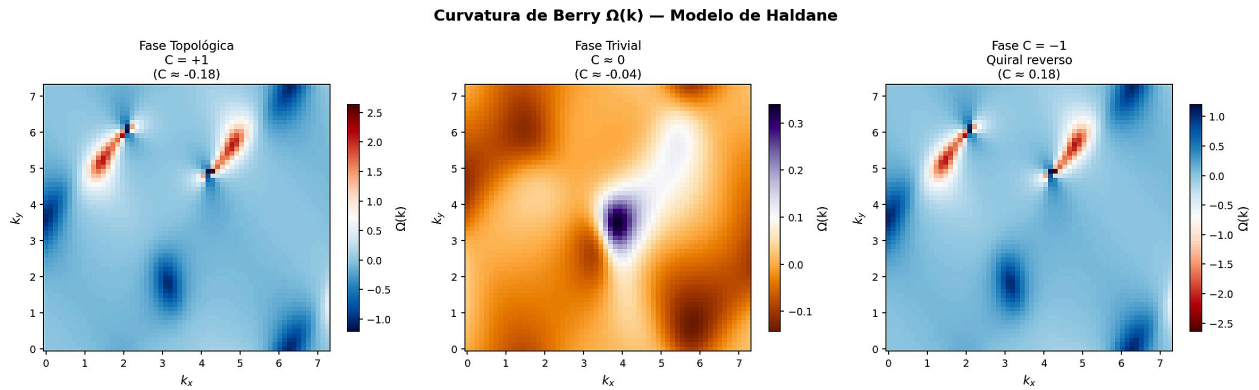
O gap fecha nos pontos de Dirac  $K$  e  $K'$  quando  $|M| = 3\sqrt{3}t_2|\sin(\varphi)|$ . O número de Chern é:

$$C = \frac{1}{2}[\text{sgn}(M + 3\sqrt{3}t_2 \sin\varphi) - \text{sgn}(M - 3\sqrt{3}t_2 \sin\varphi)]$$

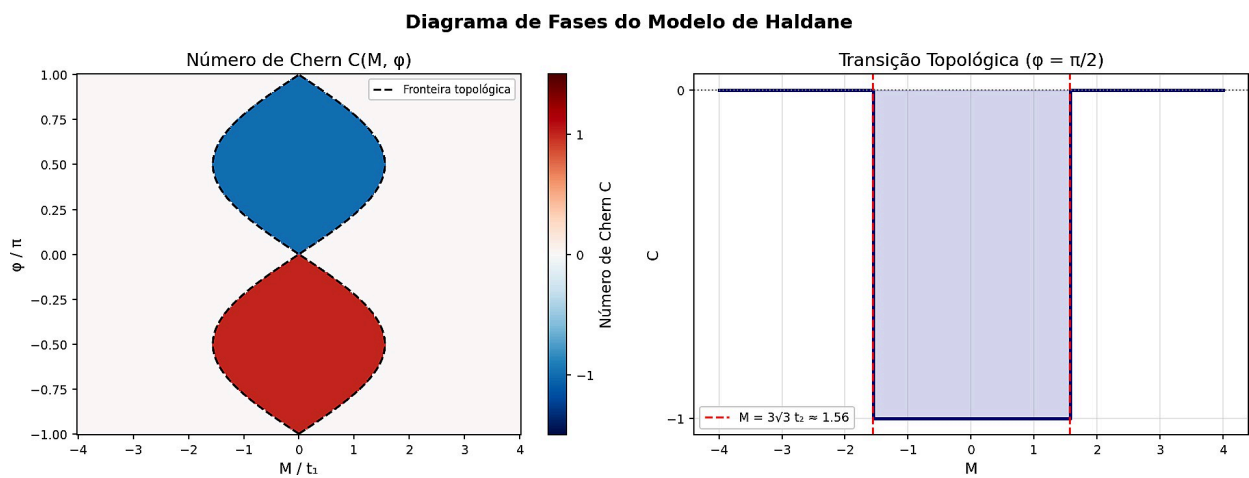
**Tabela 3:** Diagrama de fases analítico do modelo de Haldane.

Condição	C	Fase
$ M  > 3\sqrt{3}t_2 \sin\varphi $	0	Isolante trivial
$ M  < 3\sqrt{3}t_2 \sin\varphi , \sin\varphi > 0$	+1	Isolante de Chern

$ M  < 3\sqrt{3}t_2  \sin \varphi , \sin \varphi < 0$	-1	Isolante de Chern (reverso)
---	----	-----------------------------



**Figura 9:** Curvatura de Berry  $\Omega(k)$  na zona de Brillouin para as três fases do modelo de Haldane.



**Figura 10:** Diagrama de fases  $C(M, \varphi)$  e transição topológica para  $\varphi = \pi/2$ .

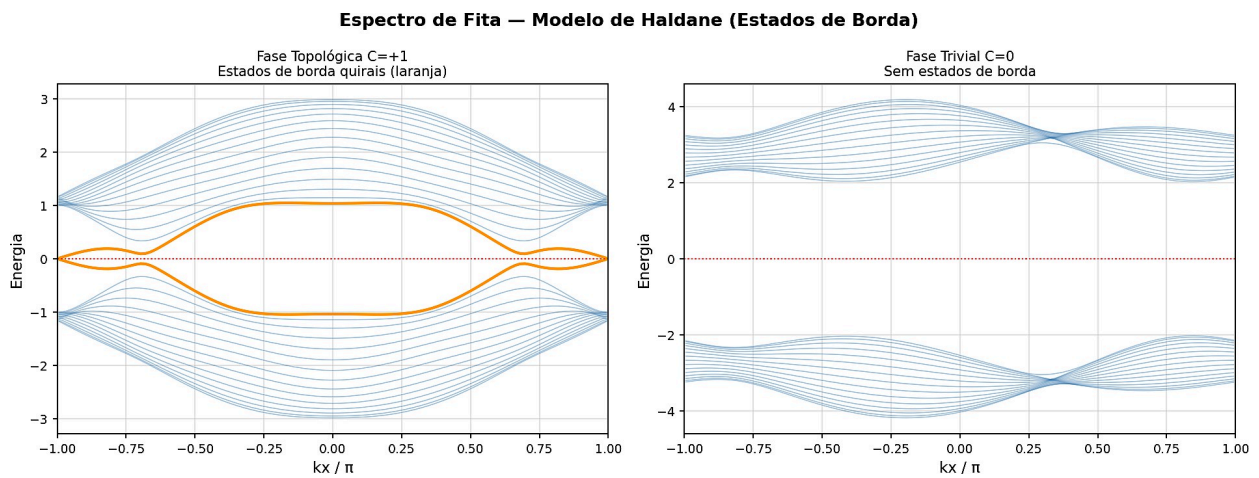
## 7. COMPARAÇÃO: SSH VERSUS HALDANE

Apesar de pertencerem a classes topológicas distintas (AIII em 1D e A em 2D), os dois modelos compartilham o mesmo roteiro algébrico, evidenciando a universalidade da abordagem matricial:

**Tabela 4:** Comparação sistemática SSH vs Haldane.

Atributo	SSH (1D)	Haldane (2D)
Dimensão	1D	2D
Rede	Bipartida (A/B)	Hexagonal (A/B)

Simetria-chave	Quiral ( $\sigma_z$ )	Quebra de rev. temporal
Termo na matriz	Hopping alternado $v, w$	Fase $\varphi$ no 2º vizinho
Invariante	Winding $\nu \in \mathbb{Z}$	Chern $C \in \mathbb{Z}$
Cálculo	Fase de $d_x + id_y$	Integral de $\Omega(k)$
Estados de borda	Localizados (zero mode)	Quirais (propagantes)
Robustez	Sob desordem quiral	Sob pert. preservando gap



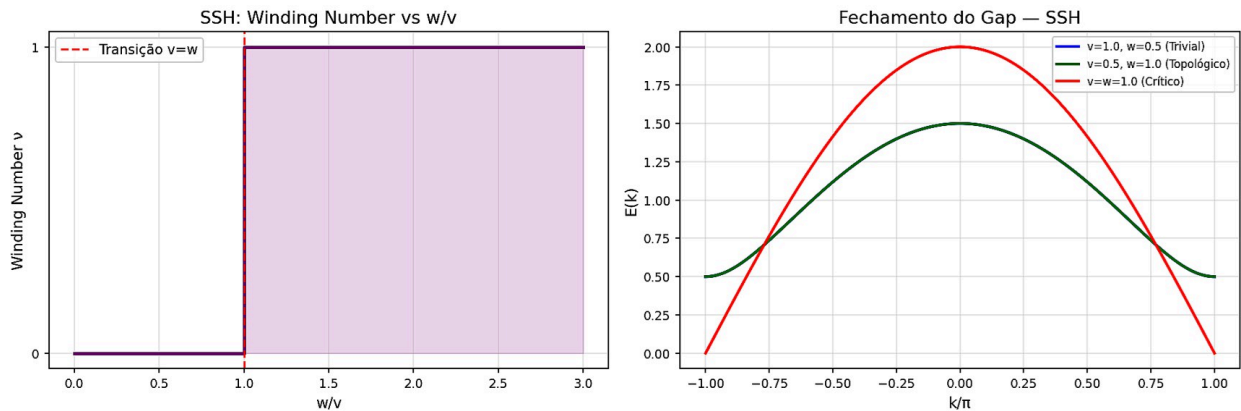
**Figura 11:** Espectro de fita (ribbon) do modelo de Haldane. Fase topológica (esq.) exhibe estados de borda quirais (laranja) no gap, e na fase trivial (dir.) não.

## 8. COMPARAÇÃO SSH X HALDANE

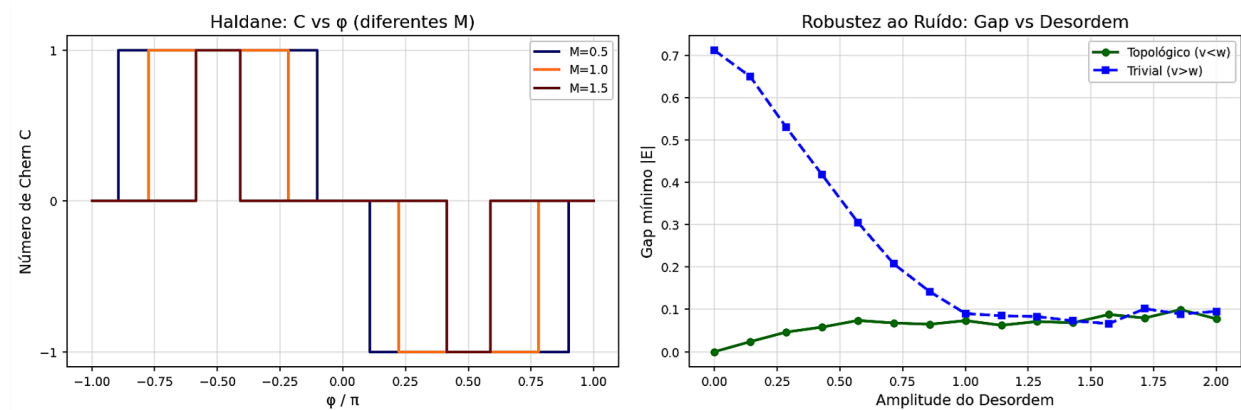
A comparação entre os dois é basicamente uma progressão didática:

- Começamos com o SSH para aprender que alternar ligações em uma simples linha (1D) pode criar elétrons isolados e protegidos nas pontas.
- Avançamos para o Haldane para aprender que alterar as fases dos elétrons em uma rede 2D (sem um campo magnético externo total) pode criar correntes elétricas perfeitas que viajam apenas pelas bordas do material.

Ambos demonstram o princípio da correspondência bulk-borda: o que acontece no interior do material (o bulk, que é isolante) dita matematicamente o surgimento de estados condutores incríveis nas bordas!



**Figura 12:** Caso i) Análise comparativa: winding number SSH, fechamento de gap, número de Chern vs  $\varphi$ , e robustez ao ruído.



**Figura 13:** Caso ii) Análise comparativa: número de Chern vs  $\varphi$ , e robustez ao ruído.

## 9. VANTAGENS DA ABORDAGEM POR ÁLGEBRA LINEAR

### 9.1. Vantagem Computacional

Diagonalizar matrizes esparsas é computacionalmente muito mais eficiente do que resolver equações diferenciais parciais com condições de contorno periódicas. Algoritmos como Lanczos e ARPACK permitem tratar sistemas com  $10^6$  sítios em hardware convencional. Sistemas desordenados são impossíveis de tratar por

transformada de Fourier, são naturalmente acomodados na representação matricial.

## **9.2. Classificação Universal**

As 10 classes de Altland-Zirnbauer da matéria topológica são definidas exclusivamente por propriedades de simetria das matrizes  $H$ . A tabela periódica dos isolantes e supercondutores topológicos que classifica todos os sistemas em cada dimensão, decorre diretamente de K-teoria aplicada a álgebras de matrizes. Não há apelo a fibrados vetoriais explícitos.

## **9.3. Generalização a Sistemas Artificiais**

O mesmo formalismo estende-se imediatamente a redes fotônicas, circuitos de LC, metamateriais acústicos e redes de circuitos de Josephson. Em todos os casos, escrever a matriz de adjacência com as fases e amplitudes apropriadas é suficiente para extrair a topologia. Isso democratiza o acesso à física topológica além da física do estado sólido tradicional.

## **9.4. Implicações para Computação Quântica Topológica**

Qubits topológicos baseados em férmions de Majorana que ocorrem nas terminações de cadeias de Kitaev, o análogo supercondutivante da cadeia SSH herdam a proteção topológica do winding number. O tempo de decoerência efetivo escala exponencialmente com o tamanho do sistema no regime topológico, comparado ao decaimento polinomial de qubits convencionais. A abordagem matricial permite simular e otimizar tais sistemas em hardware clássico.

## 10. CONCLUSÃO

A convergência entre a álgebra linear e a topologia quântica estabelece um arcabouço analítico rigoroso e de elevada eficiência para o escrutínio de sistemas físicos complexos. A transposição de problemas tradicionalmente fundamentados na topologia diferencial para um domínio puramente algébrico é viabilizada pelo emprego estratégico de matrizes de adjacência, formas bilineares e invariantes espectrais. Nesse paradigma, as propriedades globais do sistema emergem de operações matriciais bem definidas, permitindo uma descrição matemática onde a conectividade e as fases geométricas são codificadas em operadores lineares acessíveis ao cálculo computacional moderno.

Os resultados obtidos demonstram que esta metodologia oferece vantagens operacionais substanciais, particularmente na manipulação de matrizes esparsas em larga escala através de técnicas avançadas de diagonalização. A classificação das fases da matéria torna-se, assim, fundamentada nas propriedades de simetria do Hamiltoniano, permitindo uma categorização universal baseada em classes de simetria robustas. Além disso, a generalização desse modelo para sistemas artificiais, como redes fotônicas, circuitos elétricos e metamateriais acústicos, confirma o caráter abrangente da abordagem, que consegue descrever fenômenos quânticos em plataformas clássicas de engenharia.

No âmbito da computação quântica, a representação matricial revela-se um instrumento essencial para o estudo e a otimização de qubits topológicos. A estabilidade desses dispositivos é intrinsecamente ligada à proteção conferida por invariantes inteiros que garantem a imunidade contra perturbações locais e ruído

ambiental. Modelos paradigmáticos, como os de Su-Schrieffer-Heeger e Haldane, ilustram a universalidade deste protocolo, que consiste essencialmente na construção da matriz de adjacência, sua transformação para o espaço recíproco e a decomposição em termos de matrizes fundamentais para extrair o índice topológico correspondente.

Dessa forma, a topologia quântica perde seu caráter puramente abstrato ao ser traduzida para a linguagem da álgebra linear. As matrizes de adjacência codificam a topologia do sistema, enquanto as formas bilineares aplicadas aos autovetores definem a dinâmica e a curvatura do espaço de parâmetros. Os invariantes topológicos manifestam-se como números inteiros calculáveis a partir de propriedades básicas como autovalores, determinantes e traços. Conclui-se que essa unificação interdisciplinar não apenas simplifica a análise teórica, mas estabelece uma base sólida para o desenvolvimento de novas arquiteturas de processamento de informação, onde a matriz de entrada determina o estado topológico final de forma determinística e protegida.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ALTLAND, A.; ZIRNBAUER, M. R. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Physical Review B*, [s. l.], v. 55, n. 2, p. 1142–1161, jan. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.1142>.

ATIYAH, M. F.; SINGER, I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Providence, v. 69, n. 3, p. 422–433,

BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical and Physical Sciences, London, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023>.

CHIU, C.-K. et al. Classification of topological quantum matter with symmetries. Re-views of Modern Physics, [s. l.], v. 88, n. 3, p. 035005, ago. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.035005>.

HALDANE, F. D. M. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the "parity anomaly". Physical Review Letters, [s. l.], v. 61, n. 18, p. 2015–2018, out. 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.2015>.

HASAN, M. Z.; KANE, C. L. Colloquium: topological insulators. Reviews of Modern Physics, [s. l.], v. 82, n. 4, p. 3045–3067, nov. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/RevMod>

KANE, C. L.; MELE, E. J. Z topological order and the quantum spin Hall effect. Physical Review Letters, [s. l.], v. 95, n. 14, p. 146802, set. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.146802>.

KITAEV, A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires. Physics-Uspekhi, [s. l.], v. 44, n. 10S, p. 131–136, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29>.

NAYAK, C. et al. Non-Abelian anyons and topological quantum computation. Reviews of Modern Physics, [s. l.], v. 80, n. 3, p. 1083–1159, set. 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083>.

QI, X.-L.; ZHANG, S.-C. Topological insulators and superconductors. *Reviews of Modern Physics*, [s. l.], v. 83, n. 4, p. 1057–1110, out. 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/RevMo>

SCHNYDER, A. P. et al. Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions. *Physical Review B*, [s. l.], v. 78, n. 19, p. 195125, nov. 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.195125>.

SU, W. P.; SCHRIEFFER, J. R.; HEEGER, A. J. Solitons in polyacetylene. *Physical Review Letters*, [s. l.], v. 42, n. 25, p. 1698–1701, jun. 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.1698>.

THOULESS, D. J. et al. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*, [s. l.], v. 49, n. 6, p. 405–408, ago. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.405>.

VANDERBILT, D. Berry phases in electronic structure theory: electric polarization, orbital magnetization and topological insulators. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. ISBN 978-1-107-15765-5.

ZANARDI, P.; RASETTI, M. Holonomic quantum computation. *Physics Letters A*, [s. l.], v. 264, n. 2–3, p. 94–99, dez. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(99\)00803-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00803-8).

---

<sup>1</sup> Mestre em Modelagem Matemática Computacional - UFPB. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0374-7056>. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#)

<sup>2</sup> Bacharel em Sistemas de Informação - UNINASSAU/Parnaíba-PI.  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2561-3118>. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#)

<sup>3</sup> Mestre em Matemática (PROFMAT) - UFPI. ORCID:  
<https://orcid.org/0009-0002-7255-8655>. E-mail: [acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#)