REVISTA TÓPICOS
ISSN 2965-6672 | Qualis A2

ESTIMATIVA DE COERCIVIDADE BILATERAL PARA O OPERADOR DE JACOBI NA CLASSE CONFORME DE SUPERFÍCIES HIPERBÓLICAS COMPACTAS

BILATERAL COERCIVITY ESTIMATE FOR THE JACOBI OPERATOR IN THE CONFORMAL CLASS OF COMPACT HYPERBOLIC SURFACES

Ciências Exatas e da Terra, Engenharias • 01/05/2026

REGISTRO DOI: 10.70773/revistatopicos/777452347

Mario Cesar Garms Thimoteo[1]

RESUMO

O artigo estabelece uma estimativa de coercividade bilateral para o operador de Jacobi associado à classe conforme de superfícies hiperbólicas compactas de gênero maior ou igual a dois. Demonstra-se que, no regime perturbativo em espaço de Sobolev de ordem dois, a norma quadrática da ação do operador sobre o fator conforme é equivalente à norma de Sobolev do fator, com constantes explícitas dependentes apenas da superfície de base. O mecanismo governante é a estrita positividade do primeiro autovalor do operador no subespaço de média nula, decorrente do gap espectral. A variância intrínseca de curvatura satisfaz a mesma estimativa bilateral no mesmo regime, via redução não linear que controla a distorção de medida, o peso multiplicativo e o resto quadrático associados à mudança conforme. A constante ótima assintótica de coercividade é identificada como função espectral explícita cujo ínfimo vale um, aproximado pelos altos autovalores e alcançado apenas no limite assintótico. O supremo da função corresponde ao modo de mais baixa frequência, amplificado no infravermelho. Um cálculo explícito na superfície de Bolza fornece a razão espectral aproximadamente igual a um vírgula setecentos e quarenta e um. O resultado caracteriza a energia de Calabi restrita à classe conforme como realização local da norma do grafo do operador de Jacobi, estabelecendo equivalência quantitativa entre rigidez conforme e completude espectral.

Palavras-chave: Operador de Jacobi; coercividade bilateral; geometria conforme; superfícies hiperbólicas compactas; rigidez quantitativa.

ABSTRACT

This paper establishes a bilateral coercivity estimate for the Jacobi operator associated with the conformal class of compact hyperbolic

surfaces of genus greater than or equal to two. It proves that, under small conformal perturbations in a second-order Sobolev space, the squared norm of the operator applied to the conformal factor is equivalent to the Sobolev norm of the factor itself, with explicit constants depending only on the base surface. The governing mechanism is the strict positivity of the first eigenvalue of the operator on the mean-zero subspace, which follows from the spectral gap. The intrinsic curvature variance satisfies the same bilateral estimate in the same regime, through a nonlinear reduction that controls the measure distortion, the multiplicative weight, and the quadratic remainder associated with the conformal change. The asymptotic optimal coercivity constant is identified as an explicit spectral function whose infimum equals one, approached by high eigenvalues and attained only in the asymptotic limit. The supremum corresponds to the lowest-frequency mode, amplified in the infrared regime. An explicit computation on the Bolza surface yields a spectral ratio approximately equal to one point seven four one. The result characterises the Calabi energy restricted to the conformal class as a local realisation of the graph norm of the Jacobi operator, establishing quantitative equivalence between conformal rigidity and spectral completeness.
Keywords: Jacobi operator; bilateral coercivity; conformal geometry; compact hyperbolic surfaces; quantitative rigidity.

1. INTRODUÇÃO

Um tema central em análise geométrica é a passagem da rigidez qualitativa para a rigidez quantitativa. Quando um funcional de déficit geométrico é pequeno, a questão natural é estabelecer quão próximo o objeto geométrico está da configuração rígida, e sob qual norma essa proximidade se mede. Exemplos clássicos incluem a desigualdade de Fusco, Maggi e Pratelli para o déficit isoperimétrico (Fusco; Maggi; Pratelli, 2008), a estabilidade de Bianchi e Egnell para extremais da desigualdade de Sobolev (Bianchi; Egnell, 1991) e os teoremas de quase-rigidez de Colding (Colding, 1996).

Em geometria conforme, o teorema de uniformização garante que toda classe conforme sobre uma superfície compacta de gênero $\gamma \geq 2$ contém uma métrica hiperbólica única. A energia de Calabi restrita à classe conforme fornece um funcional natural de déficit:

$$\eta(g) := \int_M (K_g + \kappa_0)^2 \, d\mu_g ,$$

em que K_g denota a curvatura gaussiana de $g = e^{2\psi} g_0$ e $\kappa_0 = \frac{2\pi(2\gamma - 2)}{\mathrm{Area}(M, g_0)}$ é a curvatura hiperbólica

1.1. Resultado Principal

Teorema 1.1 (Estimativa de coercividade bilateral para o operador de Jacobi). Seja (M, g_0) uma superfície hiperbólica compacta de gênero $\gamma \geq 2$. Existem $\varepsilon_0 > 0$ e $0 < c \leq C < \infty$, dependentes apenas de (M, g_0), tais que, sempre que $\|\psi\|_{H^2} < \varepsilon_0$, vale

$$c\|\psi\|_{H^2}^2 \leq \eta(g) \leq C\|\psi\|_{H^2}^2 .$$

As constantes satisfazem $c \geq \frac{\lambda_1(J)^2}{4C_{ell}^2}$ e $\varepsilon_0 \geq \frac{\lambda_1(J)}{2C_{ell}C_R}$, em que C_{ell} depende apenas da estrutura elíptica de J e C_R depende da imersão de Sobolev em dimensão dois. O resultado estabelece uma estimativa quantitativa de estabilidade no regime perturbativo. Não afirma coercividade global (ver Problema em aberto 4.1). Todo o mecanismo de rigidez reduz-se a uma única condição espectral: $\lambda_1(J) > 0$. Essa condição é suficiente e necessária para a estimativa bilateral; caso o gap espectral se anule, a cota inferior falha (Corolário 4.7).

As técnicas empregadas — regularidade elíptica, imersão de Sobolev, teoria de Fredholm — são clássicas. O que é novo é o resultado específico: a estimativa bilateral com constantes espectrais explícitas para a energia de Calabi restrita à classe conforme de superfícies hiperbólicas compactas, junto com a identificação da constante assintoticamente ótima como função espectral computável. Até onde se sabe, uma estimativa bilateral perturbativa explícita nessa forma, nesse contexto conforme, ainda não havia sido registrada.

A principal contribuição técnica é a Proposição 4.2, que estabelece uma comparação bilateral precisa entre a energia de Calabi e a norma do grafo do operador linearizado. A passagem de $\eta(g)$ para $\|J\psi\|^2_{L^2(g_0)}$ exige o controle simultâneo de três efeitos distintos: (i) a mudança conforme de medida, $d\mu_g = e^{2\psi} d\mu_{g_0}$; (ii) o peso multiplicativo $e^{-2\psi}$ na fórmula da curvatura; (iii) o resto quadrático $Q_0(\psi) = e^{2\psi} - 1 - 2\psi$. Nenhum desses efeitos é absorvido apenas pela regularidade elíptica. Em particular, a estimativa não segue da coercividade de J isoladamente, mas de um controle acoplado de medida, pesos e restos não lineares.

1.2. O Que é e o Que Não é Novo

A energia de Calabi e sua teoria de Euler-Lagrange são clássicas; ver Calabi (1982), Chen (2001), Chruściel (1991) e Struwe (2008). A identidade do hessiano $\mathrm{Hess}\, F = 2L^i L$ para funcionais do tipo resíduo quadrático é implícita em Bourguignon e Lawson (1981) no contexto de Yang-Mills, e em Koiso (1978, 1980) para métricas de Einstein. O presente artigo contribui com:

O presente artigo contribui com:

i. uma estimativa de coercividade bilateral $\eta \asymp \| \psi \|_{H^2}^2$ com constantes espectrais explícitas;

ii. a identificação da constante assintoticamente ótima como função espectral $c_{\text{opt}}^2 = \inf_j R\mu_j, \kappa_0 = 1,$ com análise de monotonicidade e saturação ultravioleta;

iii. a interpretação de η como norma do grafo ao quadrado do operador de Jacobi, conectando coercividade e completude observacional;

iv. um teorema abstrato de coercividade bilateral para a classe $F = \{ \| R \cdot \|^2 \}$ sob quatro hipóteses estruturais explícitas (H1) a (H4).

O arcabouço abstrato da Seção 2.3 é logicamente independente da geometria conforme: aplica-se a qualquer funcional da forma $F(u) = \|R(u)\|^2$, em que R se anula em um ponto crítico e a linearização $L = DR(u_0)$ satisfaz (H1) a (H4). A aplicação geométrica à energia de Calabi é uma instância; a mesma estrutura governa resíduos de Yang-Mills (Bourguignon; Lawson, 1981), funcionais de déficit de Einstein (Koiso, 1978, 1980) e, mais amplamente, qualquer problema variacional de resíduo quadrático com linearização elíptica e gap espectral.

1.3. Comparação com Resultados Existentes

Entre as referências de estabilidade quantitativa mais próximas, o trabalho de Frank e König (2024) é o mais afim em espírito: ambos os resultados estabelecem estabilidade quantitativa precisa via análise espectral de um operador elíptico associado. Os contextos geométricos são, contudo, substancialmente distintos. Frank e König estabelecem estabilidade quantitativa para o espectro de Dirichlet sob deformação do domínio — perturbações de forma da bola em R^n —, com mecanismo de estabilidade baseado em derivadas de forma e monotonicidade em relação ao domínio.

No presente artigo, o domínio M é fixo, e a perturbação atua dentro de uma única classe conforme: $g = e^{2\psi} g_0$ com $\psi \in H_0^2(M)$. O déficit é a variância intrínseca de curvatura $\eta(g)$, e a coercividade é governada inteiramente pelo gap espectral do operador de Jacobi $J = -\Delta_{g_0} + 2\kappa_0$ sobre o subespaço de média nula. A distinção — deformação de domínio contra deformação conforme com domínio fixo — explica as ferramentas analíticas distintas (cálculo de forma contra regularidade elíptica e álgebra de Sobolev em dimensão dois) e os papéis diferentes desempenhados pelo gap espectral em cada contexto.

1.4. Organização do Artigo

A Seção 2 apresenta a fundamentação teórica: convenções geométricas (2.1), o operador de Jacobi e suas propriedades elípticas (2.2) e o arcabouço variacional abstrato (2.3). A Seção 3 descreve a metodologia — formulação das hipóteses estruturais, verificação dessas hipóteses no caso geométrico e estimativas não lineares associadas à mudança conforme. A Seção 4 apresenta os resultados: o teorema abstrato de coercividade bilateral (4.1), a redução quadrática (4.2), o teorema principal (4.3), a análise da constante ótima (4.4), o cálculo explícito na superfície de Bolza (4.5) e a interpretação via norma do grafo com conexões a temas correlatos (4.6). A Seção 5 apresenta as considerações finais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção reúne os objetos geométricos e analíticos utilizados no artigo. A Subseção 2.1 fixa convenções sobre o laplaciano, a mudança conforme e os espaços funcionais. A Subseção 2.2 define o operador de Jacobi e estabelece suas propriedades elípticas básicas. A Subseção 2.3 apresenta o arcabouço variacional abstrato que, isolado da geometria, captura a estrutura comum a todos os problemas de coercividade bilateral para funcionais do tipo resíduo quadrático.

2.1. Superfície Hiperbólica e Convenções Geométricas

Em todas as seções geométricas, (M, g_0) denota uma superfície riemanniana compacta, conexa, orientável, sem bordo, de gênero $\gamma \geq 2$, munida de sua métrica hiperbólica única com curvatura $K_{g_0} \equiv -\kappa_0, \kappa_0 > 0$. Existência e unicidade seguem da uniformização (Aubin, 1998). Adotam-se as convenções:

(C1) Sinal do laplaciano. $\Delta = i(\nabla \cdot)$ é negativo-semidefinido. Os autovalores de $-\Delta$ são $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$.

(C2) $K_{g_0} = -\kappa_0$ com $\kappa_0 > 0$.

(C3) Gauss-Bonnet. $\kappa_0 = 2\pi(2\gamma - 2) / \mathrm{Area}(M, g_0)$.

(C4) Fator conforme. $g = e^{2\psi} g_0$, com $\psi \in H^2(M)$ e $\int_M \psi \, d\mu_{g_0} = 0$.

(C5) Mudança conforme de medida. $d\mu_g = e^{2\psi} d\mu_{g_0}$.

(C6) Norma de Sobolev. $\|\psi\|_{H^2}^2 = \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{g_0} \psi\|_{L^2}^2 + \|\Delta_{g_0} \psi\|_{L^2}^2$.

(C7) Domínio funcional. O operador $J = -\Delta_{g_0} + 2\kappa_0$ atua sobre $H_0^2(M) := \{\psi \in H^2(M) : \int_M \psi \, d\mu_{g_0} = 0\}$.

Observação 2.1 (Casos excluídos). Na esfera ($\gamma = 0$), o grupo $PSL(2, C)$ gera um núcleo não trivial para η. No toro plano ($\gamma = 1$), $\kappa_0 = 0$ e $\lambda_{\min}(J) = 0$, de modo que a coercividade falha. Ambos os casos estão fora do escopo deste artigo.

A curvatura transforma-se segundo

$$K_g + \kappa_0 = e^{-2\psi}[-\Delta_{g_0}\psi + \kappa_0(e^{2\psi} - 1)].$$

2.2. O Operador de Jacobi e Suas Propriedades Elípticas

Definição 2.2 (Operador de Jacobi). O operador de Jacobi é

$$J := -\Delta_{g_0} + 2\kappa_0 : H_0^2(M) \to L^2(M, g_0)$$

Esse operador é a linearização do resíduo de curvatura $R(\psi) = K_g + \kappa_0$ em $\psi = 0$.

Lema 2.3 (Coercividade de J). O espectro de J restrito a H_0^2 satisfaz $spec(J \restriction H_0^2) \subset \mathbb{C}$. Em particular, $\lambda_{min}(J) = \mu_1 + 2\kappa_0 \geq 2\kappa_0 > 0$ sobre $H_0^2(M)$, e, para todo $\psi \in H_0^1(M)$:

$$\langle J\psi, \psi\rangle_{L^2} = \int_M (|\nabla_{g_0}\psi|^2 + 2\kappa_0\psi^2)d\mu_{g_0} \geq 2\kappa_0\|\psi\|_{L^2}^2 .$$

A implicação $\lambda_1(J) > 0 \Rightarrow F(\psi) = \|J\psi\|_{L^2}^2$ é coerciva segue diretamente, com $c \sim \lambda_1(J)^2$.

Prova. Os autovalores de J sobre H_0^2 são $\mu_j + 2\kappa_0$ para $j \geq 1$. Como $\mu_1 > 0$ — primeiro autovalor positivo de $-\Delta_{g_0}$, sob a condição de média nula em superfície compacta de gênero $\gamma \geq 2$ — e $\kappa_0 > 0$, todos os autovalores de J sobre H_0^2 superam $2\kappa_0$. A identidade integral resulta da integração por partes em superfície compacta. □

Observação 2.4 (Gap espectral e domínio funcional). O valor de $\lambda_{min}(J)$ depende do domínio funcional: $\lambda_{min}(J) = 2\kappa_0$ em $L^2(M)$ (modo constante e_0 presente) e $\lambda_{min}(J) = \mu_1 + 2\kappa_0$ em $H_0^2(M)$ (média nula, modo constante excluído). Ao longo deste artigo, J atua sobre $H_0^2(M)$ e o gap operativo é $\lambda_1(J) = \mu_1 + 2\kappa_0$. Todas as constantes de coercividade dependem de $\lambda_1(J) = \mu_1 + 2\kappa_0$, e não de $2\kappa_0$.

Definição 2.5 (Funcional quadrático). Para $\psi \in H_0^2(M)$, define-se $F(\psi) := \|J\psi\|_{L^2}^2$.

Observação 2.6 (Equivalência com η). A variância intrínseca de curvatura $\eta(g) = \|K_g + \kappa_0\|_{L^2(g)}^2$ difere de $F(\psi) = \|J\psi\|_{L^2(g_0)}^2$ por termos de peso de medida e termos não lineares. Em ordem linear em ψ, as duas quantidades coincidem. A estimativa bilateral para η é obtida a partir da estimativa bilateral para F via análise não linear (Seção 3).

Proposição 2.7 (Estimativa bilateral de Sobolev para F). Para $\psi \in H_0^2(M)$ com $\|\psi\|_{H^2} \le \delta$:

$$c\|\psi\|_{H^2}^2 \le \|J\psi\|_{L^2}^2 \le C\|\psi\|_{H^2}^2,$$

em que $c = C_{reg}^{-2}$ e $C = \|J\|_{H^2 \to L^2}^2$, com $C_{reg} = \|J^{-1}\|_{L^2 \to H^2}$.

Prova. Cota inferior: a estimativa elíptica (Lema 3.8) fornece $\|\psi\|_{H^2} \le C_{reg}\|J\psi\|_{L^2}$; logo $\|J\psi\|_{L^2}^2 \ge C_{reg}^{-2}\|\psi\|_{H^2}^2$. Cota superior: $\|J\psi\|_{L^2}^2 \le \|J\|_{H^2}$

2.3. O Arcabouço Variacional Abstrato

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Hilbert reais separáveis, $U \subset X$ aberto e $R: U \to Y$ uma aplicação de classe C^2 com $R(u_0) = 0$ para algum $u_0 \in U$. Define-se $F(u) := \|R(u)\|_Y^2$. A linearização é $L := DR(u_0): X \to Y$. A fórmula universal $D^2F(u_0) = 2L^*L$ é algébrica. Impõem-se as hipóteses seguintes:

(H1) Estimativa elíptica. Existe $C_{ell} > 0$ tal que $\|h\|_{H^2} \le C_{ell}\|Lh\|_{L^2}$ para todo $h \in H_0^2(M)$, em que $H^2 := H^2(M)$ tem norma

$$\|h\|_{H^2}^2 = \|h\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{g_0} h\|_{L^2}^2 + \|\Delta_{g_0} h\|_{L^2}^2 .$$

(H2) Propriedade de Fredholm. $L: H^2 \to L^2$ é Fredholm de índice zero.

(H3) Gap espectral. $\ker L = \{0\}$ (injetividade da linearização). Isso implica $\lambda_1(L) > 0$ e, portanto, coercividade:

$$\lambda_1(L) > 0 \Rightarrow \|h\|_{H^2} \leq C_{ell} \lambda_1(L)^{-1} \|Lh\|_{L^2} ;$$

em consequência, $c \sim \lambda_1(L)^2$.

(H4) Cota quadrática do resto. $R \in C^2(U, Y)$ e existe $C_R > 0$ tal que $\|D^2 R(u_0)(h, h)\|_{L^2} \leq C_R \|h\|_{H^2}^2$ para todo h com $\|h\|_{H^2} \leq 1$.

Observação 2.9 (Escala de (H4)). Como a cota $\|D^2 R(u_0)(h, h)\|_{L^2} \leq C_R \|h\|_{H^2}^2$ é quadrática, estende-se por homogeneidade a todo h com $\|h\|_{H^2} \leq \rho$, para qualquer $\rho > 0$, contanto que $D^2 R$ seja uniformemente contínua em $B_{H^2}(\rho)$. Na aplicação geométrica, a continuidade uniforme de $D^2 R$ em subconjuntos limitados de H^2 segue da imersão de Sobolev $H^2(M) \hookrightarrow C^0(M)$ em dimensão dois (Adams; Fournier, 2003) e da suavidade da aplicação exponencial. Isso garante que a cota em (H4), enunciada para $\|h\|_{H^2} \leq 1$, aplica-se sem modificação na escala $\|\psi\|_{H^2} \leq \varepsilon_0$ usada no Teorema 2.10.

Teorema 2.10 (Coercividade bilateral abstrata). Suponha-se que (H1) a (H4) valham. Definam-se $C_0 := \|L^{-1}\|_{L^2 \to H^2}$ e $\varepsilon_0 := 1/(2C_0 C_R)$. Então, para todo $\psi \in H_0^2(M)$ com $\|\psi\|_{H^2} < \varepsilon_0$:

$$c\|\psi\|_{H^2}^2 \leq F(u_0 + \psi) \leq C\|\psi\|_{H^2}^2 ,$$

com $C = 2\|L\|_{H^2 \to L^2}^2 + C_R^2 \varepsilon_0^2$ e $c = (4C_0^2)^{-1}$.

Prova. Escreve-se $R(u_0 + \psi) = L\psi + Q(\psi)$, em que $Q(\psi) = \int_0^1 (1 - t) D^2 R(u_0 + t\psi)(\psi, \psi)\, dt$. Por (H4) e pela Observação 2.9, $\|Q(\psi)\|_{L^2} \le \frac{1}{2} C_R \|\psi\|_{H^2}^2$.

Passo 1 (Cota superior). $F(u_0 + \psi) = \|L\psi + Q(\psi)\|_{L^2}^2 \le 2\|L\psi\|_{L^2}^2 + 2\|Q(\psi)\|_{L^2}^2 \le 2\|L\|_{H^2 \to L^2}^2 \|\psi\|_{H^2}^2 + \frac{1}{2} C_R^2 \|\psi\|_{H^2}^4$. Para $\|\psi\|_{H^2} < \varepsilon_0 : F \le C\|\psi\|_{H^2}^2$.

Passo 2 (Estimativa elíptica). Por (H1) a (H3) e pela alternativa de Fredholm, $L : H^2 \to L^2$ é um isomorfismo. A estimativa elíptica (Gilbarg; Trudinger, 2001) fornece $\|\psi\|_{H^2} \le C_0 \|L\psi\|_{L^2}$ para todo $\psi \in H_0^2(M)$.

Passo 3 (Cota inferior). Pela desigualdade triangular reversa, $\|L\psi\|_{L^2} \le \sqrt{F} + \frac{1}{2} C_R \|\psi\|_{H^2}^2$. Combinando com o passo 2, $\|\psi\|_{H^2} \le C_0 \sqrt{F} + \frac{1}{2} C_0 C_R \|\psi\|_{H^2}^2$. Para $\|\psi\|_{H^2} \le \varepsilon_0 = (2C_0 C_R)^{-1}$, tem-se $\frac{1}{2}\|\psi\|_{H^2} \le C_0 \sqrt{F}$; logo $F \ge (4C_0^2)^{-1} \|\psi\|_{H^2}^2$.

Proposição 2.11 (Dependência espectral das constantes). Sob a notação do Teorema 2.10, valem:

- (i) $C_0 \le C_{ell} \lambda_1 (L)^{-1}$;
- (ii) $\varepsilon_0 \ge \lambda_1 (L) / (2C_{ell} C_R)$;
- (iii) $c \ge \lambda_1 (L)^2 / (4C_{ell}^2)$;
- (iv) as constantes dependem apenas da estrutura elíptica de L e das cotas em (H1) a (H4), sendo independentes da interpretação geométrica.

3. METODOLOGIA

Esta seção descreve a estratégia analítica adotada para estabelecer o Teorema 1.1. A metodologia segue três etapas articuladas. Primeiro, verifica-se que o operador de Jacobi J na superfície hiperbólica satisfaz as quatro hipóteses estruturais (H1) a (H4) do arcabouço abstrato (Subseção 3.1). Segundo, desenvolvem-se estimativas não lineares que quantificam a distorção de medida, o peso exponencial e o resto quadrático da fórmula da curvatura (Subseção 3.2). Terceiro, articula-se a redução do funcional geométrico $\eta(g)$ ao funcional linearizado $F(\psi) = \|J\psi\|_{L^2}^2$ via *bootstrap* de exclusão de fronteira em conjunto de subnível (Subseção 3.3). Todos os argumentos são locais, no regime perturbativo $\|\psi\|_{H^2} \leq \delta$ com $\delta > 0$ pequeno. As constantes envolvidas dependem apenas dos dados geométricos de (M, g_0): a curvatura de referência κ_0, o primeiro autovalor não trivial μ_1 do laplaciano, a constante de Sobolev C_S e a constante de regularidade $C_{reg} = \|J^{-1}\|_{L^2 \to H^2}$.

3.1. Verificação das Hipóteses no Caso Geométrico

Proposição 3.1 (Verificação de (H1)-(H4) para $L = J$). As hipóteses (H1) a (H4) valem para $L = J = -\Delta_{g_0} + 2\kappa_0$ em (M, g_0) compacta hiperbólica, $\gamma \geq 2$.

Prova.

(H1). $-\Delta_{g_0}$ é elíptico de segunda ordem, autoadjunto em $L^2(M, g_0)$, com espectro discreto convergente a $+\infty$ pela compacidade. A soma com o operador limitado $2\kappa_0 Id$ preserva essas propriedades. A estimativa elíptica segue da teoria clássica (Gilbarg; Trudinger, 2001).

(H2). Em variedade compacta sem bordo, todo operador elíptico de segunda ordem $H^2 \to L^2$ é Fredholm de índice zero (Gilbarg; Trudinger, 2001).

(H3). Pelo Lema 2.3, $\lambda_{min}(J \upharpoonright H_0^2) = \mu_1 + 2\kappa_0 > 0$.

(H4). Calcula-se explicitamente a segunda derivada de Fréchet de $R(\psi) = e^{-2\psi}(-\kappa_0 - \Delta_{g_0}\psi) + \kappa_0$. Derivando duas vezes em $\psi = 0$:

$$D^2 R(0)(h,h) = 4\kappa_0 h^2 + 4h\Delta_{g_0} h - 2\Delta_{g_0}(h^2),$$

em que cada termo é produto ou composição de h com suas derivadas até ordem dois. Em dimensão dois, $H^2(M) \hookrightarrow C^0(M)$ com constante C_S (Adams; Fournier, 2003), e $H^2(M)$ é álgebra de Banach: para $f,g \in H^2$, a regra de Leibniz fornece $\|fg\|_{H^2} \le C_{alg}\|f\|_{H^2}\|g\|_{H^2}$. Aplicando essa propriedade a cada termo: o termo $4\kappa_0 h^2$ satisfaz $\|h^2\|_{L^2} \le \|h\|_{C^0}\|h\|_{L^2} \le C_S\|h\|_{H^2}^2$; o termo $4h\Delta_{g_0} h$ satisfaz $\|h\Delta_{g_0} h\|_{L^2} \le \|h\|_{C^0}\|\Delta_{g_0} h\|_{L^2} \le C_S\|h\|_{H^2}^2$; o termo $\Delta_{g_0}(h^2) = 2h\Delta_{g_0} h + 2|\nabla_{g_0} h|^2$ satisfaz $\|\Delta_{g_0}(h^2)\|_{L^2} \le C'\|h\|_{H^2}^2$ pela estrutura de álgebra de Banach. Tomando $C_R = 4\kappa_0 C_S + 4C_S + 2C'$, completa-se a verificação. □

3.2. Estimativas Não Lineares

Denota-se por C_S a constante da imersão de Sobolev $\|\psi\|_{C^0} \le C_S\|\psi\|_{H^2}$, válida na superfície compacta M em dimensão dois (Adams; Fournier, 2003).

Lema 3.2 (Estimativa L^2 para o resto não linear). Para $\delta > 0$, define-se $C_Q(\delta) := 2C_S e^{4C_S\delta}$. Então, para todo $\psi \in H_0^2(M)$ com $\|\psi\|_{H^2} \le \delta$: $\|Q(\psi)\|_{L^2} \le C_Q(\delta)\|\psi\|_{H^2}^2$.

Prova. Pela fórmula da curvatura, $K_g + \kappa_0 = e^{-2\psi}(J\psi + \kappa_0 Q_0(\psi))$, em que $Q_0(\psi) = e^{2\psi} - 1 - 2\psi$. Para todo t, $|e^{2t} - 1 - 2t| \le 2t^2 e^{2|t|}$ (resto de Taylor). A imersão de Sobolev dá $\|\psi\|_{C^0} \le C_S\delta$; logo $e^{2|\psi|} \le e^{2C_S\delta}$ pontualmente. Combinando com $\|e^{-2\psi}\|_{L^\infty} \le e^{2C_S\delta}$, obtém-se a cota enunciada. □

Lema 3.3 (Comparação de medidas). Para $\|\psi\|_{H^2} \leq \delta$ com $C_S \delta \leq 1$ e todo $h \in L^2$:

$$e^{-2C_S\delta} \|h\|^2_{L^2(g_0)} \leq \|h\|^2_{L^2(g)} \leq e^{2C_S\delta} \|h\|^2_{L^2(g_0)} .$$

Prova. Como $d\mu_g = e^{2\psi} d\mu_{g_0}$ e $|\psi| \leq C_S \delta$ pontualmente, as cotas $e^{-2C_S\delta} \leq e^{2\psi} \leq e^{2C_S\delta}$ valem pontualmente. Integrando, obtém-se a estimativa. □

Lema 3.4 (Regularidade elíptica para J). Existe $C_{reg} > 0$, dependente apenas de (M, g_0), tal que, para todo $\psi \in H^2_0(M)$: $\|\psi\|_{H^2} \leq C_{reg} \|J\psi\|_{L^2}$. Explicitamente,

$$C_{reg} = \|J^{-1}\|_{L^2 \to H^2} = \sup_{j \geq 1} \frac{\sqrt{1 + \mu_j + \mu_j^2}}{(\mu_j + 2\kappa_0)^2} .$$

Prova. Como $\ker J \restriction H^2_0 = \{0\}$ (Lema 2.3) e J é elíptico e Fredholm, $J : H^2_0 \to L^2$ é um isomorfismo. O inverso J^{-1} é limitado $L^2 \to H^2$ pelo teorema da aplicação aberta. Para a fórmula explícita: na base própria de $-\Delta_{g_0}$, $\|\psi\|^2_{H^2} = \sum_j (1 + \mu_j + \mu_j^2) \, |a_j|^2$ e $\|J\psi\|^2_{L^2} = \sum_j (\mu_j + 2\kappa_0)^2 \, |a_j|^2$. □

3.3. Estratégia de Redução e Bootstrap

A redução do funcional geométrico $\eta(g)$ ao funcional linearizado $F(\psi) = \|J\psi\|^2_{L^2}$ não é consequência direta da regularidade elíptica. Ela requer o controle acoplado de três efeitos multiplicativos: a distorção conforme de medida $e^{2\psi}$, o peso $W(\psi) = e^{-2\psi}$ na fórmula da curvatura, e o resto exponencial $Q_0(\psi) = e^{2\psi} - 1 - 2\psi$ (Lemas 3.2 a 3.4).

A estratégia de prova da cota superior para η segue um esquema de *bootstrap* por exclusão de esfera. Fixado um limiar $\delta_0 > 0$ pequeno, mostra-se que toda perturbação ψ com $\eta(g) \leq \varepsilon_0$ pequeno e situada na componente conexa da origem em $\{\eta \leq \varepsilon_0\}$ satisfaz $\|\psi\|_{H^2} < \delta_0$. A demonstração procede por contradição: a esfera $\{\|\psi\|_{H^2} = \delta_0\}$ é incompatível com $\eta \leq \varepsilon_0$ pela escolha dos parâmetros, de modo que nenhum caminho contínuo da origem pode cruzá-la dentro do conjunto de subnível.

A cota inferior resulta da Proposição 4.2, que estabelece a estrutura quadrática $\eta(g) = \|J\psi\|_{L^2}^2 + O(\|\psi\|_{H^2}^3)$, combinada com a estimativa elíptica do Lema 3.4. A combinação das duas cotas produz o Teorema 1.1, com domínio de validade controlado pelo menor entre os dois limiares perturbativos.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta os resultados obtidos. A Subseção 4.1 enuncia o teorema abstrato de coercividade bilateral, já demonstrado no arcabouço da Seção 2.3. A Subseção 4.2 estabelece a redução quadrática da variância de curvatura à norma linearizada. A Subseção 4.3 combina as partes em uma demonstração do teorema principal. A Subseção 4.4 analisa a constante ótima de coercividade como função espectral. A Subseção 4.5 realiza o cálculo explícito sobre a superfície de Bolza. A Subseção 4.6 discute a interpretação como norma do grafo e as conexões com problemas correlatos.

4.1. Coercividade Bilateral no Caso Geométrico

Aplicando o Teorema 2.10 abstrato a $L = J$, junto com a Proposição 3.1 que verifica as hipóteses (H1) a (H4), obtém-se imediatamente a estimativa bilateral no nível do funcional linearizado $F(\psi) = \|J\psi\|_{L^2}^2$. O passo seguinte consiste em transferir essa estimativa para o funcional geométrico $\eta(g)$, que difere de F por termos não lineares envolvendo medida, peso e resto quadrático.

4.2. Estrutura Quadrática de η

Proposição 4.2 (Estrutura quadrática de η). Para $\psi \in H_0^2(M)$ com $\|\psi\|_{H^2} \le \delta$ e $C_S \delta \le 1$:

$$|\eta(g) - \|J\psi\|_{L^2}^2 \,| \le C_1 \|\psi\|_{H^2}^3,$$

em que

$$C_1 = 2(e^{2C_S\delta} - 1)\|J\|_{H^2 \to L^2}^2 + 2e^{2C_S\delta}\|J\|_{H^2 \to L^2}\,\kappa_0\, C_Q(\delta) + e^{2C_S\delta}\kappa_0^2\, C_Q(\delta)^2\,\delta,$$

com $C_Q(\delta) = 2C_S e^{4C_S\delta}$ do Lema 3.2. Em particular, $\eta(g) = \|J\psi\|_{L^2}^2 + O(\|\psi\|_{H^2}^3)$ para ψ pequeno.

A variância de curvatura admite a representação

$$\eta(g) = \|R(\psi)\|_{L^2(W(\psi)d\mu_{g_0})}^2, \quad W(\psi) := e^{-2\psi},$$

em que $R(\psi) = J\psi + \kappa_0 Q_0(\psi)$ é o resíduo de curvatura. No regime perturbativo $\|\psi\|_{H^2} \le \delta$, a imersão de Sobolev fornece as cotas uniformes $e^{-2C_S\delta} \le W(\psi) \le e^{2C_S\delta}$; portanto, $W(\psi)$ é limitado acima e abaixo por constantes estritamente positivas, dependentes apenas de (M, g_0) e δ. Essa positividade estrita é consequência do regime perturbativo, e não uma hipótese adicional.

Prova. De $K_g + \kappa_0 = e^{-2\psi}(J\psi + \kappa_0 Q_0(\psi))$ com $Q_0(\psi) = e^{2\psi} - 1 - 2\psi$, obtém-se

$$\eta(g) = \int_M (K_g + \kappa_0)^2\, d\mu_g = \int_M e^{-2\psi}(J\psi + \kappa_0 Q_0)^2\, d\mu_{g_0}.$$

Por outro lado, $\|J\psi\|_{L^2}^2 = \int_M (J\psi)^2\, d\mu_{g_0}$. A diferença decompõe-se em três termos:

Termo 1: $\int_M (e^{-2\psi} - 1)(J\psi)^2\, d\mu_{g_0}$. Pelo teorema do valor médio, $|e^{-2\psi} - 1| \le 2\,|\psi|\, e^{2|\psi|}$. Usando $\|\psi\|_{C^0} \le C_S\delta$, o termo é majorado por

$2C_S\delta e^{2C_S\delta}\|J\|^2_{H^2\to L^2}\|\psi\|^3_{H^2}$. Para δ pequeno, $2C_S\delta e^{2C_S\delta}\le e^{2C_S\delta}-1$; portanto, a majoração é $(e^{2C_S\delta}-1)\|J\|^2_{H^2\to L^2}\|\psi\|^3_{H^2}$.

Termo 2: $\int_M e^{-2\psi}\cdot 2\kappa_0 Q_0\cdot J\psi d\mu_{g_0}$. Pelo Lema 3.2, $\|Q_0\|_{L^2}\le C_Q(\delta)\|\psi\|^2_{H^2}/\kappa_0$ (restaurando o fator κ_0). O termo cruzado é majorado por $2e^{2C_S\delta}\|J\|_{H^2\to L^2}\kappa_0 C_Q(\delta)\|\psi\|^3_{H^2}$.

Termo 3: $\int_M e^{-2\psi}\kappa_0^2 Q_0^2 d\mu_{g_0}$. Esse termo é majorado por $e^{2C_S\delta}\kappa_0^2 C_Q(\delta)^2\delta\|\psi\|^3_{H^2}$.

A soma das três contribuições fornece a estimativa. □

4.3. Demonstração do Teorema Principal

Teorema 4.3 (Cota superior para η). Existem $\delta_0>0$ e $\varepsilon_0>0$, dependentes apenas de (M,g_0), tais que, se $\psi\in H^2_0(M)$ pertence à componente conexa por caminhos da origem em $\{\eta\le\varepsilon_0\}$, então $\|\psi\|_{H^2}\le C_{upp}\sqrt{\eta(g)}$, com $C_{upp}=2C_{reg}e^{C_S\delta_0}$.

Observação 4.4 (Conexidade do conjunto de subnível). A qualificação de que ψ esteja na componente conexa por caminhos da origem em $\{\eta\le\varepsilon_0\}$ é retida no enunciado. Na geometria considerada, o regime perturbativo consiste precisamente em fatores conformes ψ pequenos em H^2, conectados à origem pela reta $t\mapsto t\psi$ dentro do espaço de métricas admissíveis. Não se afirma nada, em geral, sobre conexidade de conjuntos de subnível em espaços de dimensão infinita; a qualificação isola o regime local onde as estimativas se aplicam.

Prova. A desigualdade a priori proveniente da fórmula da curvatura é

$$\|\psi\|_{H^2} \le C_{reg} e^{C_S \delta_0} \sqrt{\eta(g)} + \kappa_0 C_{reg} C_Q(\delta_0) \|\psi\|_{H^2}^2 =: A\sqrt{\eta(g)} + B\|\psi\|_{H^2}^2,$$

válida para $\|\psi\|_{H^2} \le \delta_0$, com $A = C_{reg} e^{C_S \delta_0}$ e $B = \kappa_0 C_{reg} C_Q(\delta_0)$.

Para deduzi-la, usa-se a decomposição do erro $K_g + \kappa_0 = e^{-2\psi}(J\psi + \kappa_0 Q_0(\psi))$, de modo que $\|J\psi\|_{L^2}^2 \le e^{2\psi}(K_g + \kappa_0\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \|Q_0(\psi)\|_{L^2}$. Pelo Lema 3.3, $\|e^{2\psi}(K_g + \kappa_0)\|_{L^2(g_0)} \le e^{C_S \delta_0}\sqrt{\eta(g)}$.

Combinando com a estimativa elíptica e o Lema 3.2, obtém-se a desigualdade.

Escolha de parâmetros. Escolhe-se $\delta_0 > 0$ tal que $B\delta_0 \le 1/2$ (equivalentemente, $\kappa_0 C_{reg} C_Q(\delta_0)\delta_0 \le 1/2$), e define-se $\varepsilon_0 := \delta_0^2/(16A^2)$.

Bootstrap por exclusão de fronteira. Seja $\psi \in H_0^2(M)$ com $\eta(g) \le \varepsilon_0$. Mostra-se que $\|\psi\|_{H^2} < \delta_0$. Sobre a esfera $\|\psi\|_{H^2} = \delta_0$, a desigualdade a priori fornece uma cota inferior para η. Como $B\delta_0 \le 1/2$: $1/2\delta_0 \le 1/2\|\psi\|_{H^2} \le A\sqrt{\eta(g)}$; logo $\eta(g) \ge \delta_0^2/(4A^2) = 4\varepsilon_0$. Portanto, $\{\|\psi\|_{H^2} = \delta_0\} \subset \{\eta \ge 4\varepsilon_0\}$: o conjunto de subnível $\{\eta \le \varepsilon_0\}$ não intersecta a esfera. Como $\eta(0) = 0 < \varepsilon_0$ e η é contínuo em $H_0^2(M)$, todo caminho contínuo da origem a um ponto com $\|\psi\|_{H^2} \ge \delta_0$ deve cruzar a esfera — onde $\eta \ge 4\varepsilon_0 > \varepsilon_0$. Segue-se que toda ψ na componente conexa da origem em $\{\eta \le \varepsilon_0\}$ satisfaz $\|\psi\|_{H^2} < \delta_0$.

Conclusão. Com $\|\psi\|_{H^2} < \delta_0$ estabelecido, a desigualdade fornece $\|\psi\|_{H^2} \le A\sqrt{\eta(g)} + B\|\psi\|_{H^2} \le 2A\sqrt{\eta(g)} = C_{upp}\sqrt{\eta(g)}$. □

Teorema 4.5 (Cota inferior para η). Existem $\varepsilon_1 > 0$ e $c > 0$ tais que, se $\|\psi\|_{H^2} < \varepsilon_1$: $\eta(g) \ge c\|\psi\|_{H^2}^2$, com $c = 1/2C_{reg}^{-2}$.

Prova. Pela Proposição 4.2, $\eta(g) \ge \|J\psi\|_{L^2}^2 - C_1\|\psi\|_{H^2}^3$. Pelo Lema 3.4, $\|J\psi\|_{L^2}^2 \ge C_{reg}^{-2}\|\psi\|_{H^2}^2$. Daí $\eta(g) \ge \|\psi\|_{H^2}^2(C_{reg}^{-2} - C_1\|\psi\|_{H^2})$. Escolhendo

$\varepsilon_1 = C_{reg}^{-2} / (2C_1)$, para $\|\psi\|_{H^2} < \varepsilon_1 : \eta(g) \geq 1 / 2C_{reg}^{-2} \|\psi\|_{H^2}^2$. □

Teorema 4.6 (Resultado principal). Seja (M, g_0) superfície hiperbólica compacta de gênero $\gamma \geq 2$. Defina-se $\varepsilon_0' := \min(\varepsilon_0, c_{low}\, \varepsilon_1^2)$, em que ε_0 vem do Teorema 4.3, ε_1 do Teorema 4.5 e $c_{low} = (2C_{reg}^2)^{-1}$. Então, para $g = e^{2\psi} g_0$ com $\psi \in H_0^2(M)$ e $\eta(g) \leq \varepsilon_0'$:

$$\frac{1}{2C_{reg}^2} \|\psi\|_{H^2}^2 \leq \eta(g) \leq C_{meas}^2 (2\|J\|_{H^2 \to L^2}^2 + C_R^2 \varepsilon_0^2) \|\psi\|_{H^2}^2 ,$$

em que $C_{meas} = e^{2C_S \delta}$ é o fator de peso de medida e todas as constantes dependem apenas de (M, g_0).

Prova. Os limiares são fixados nos Teoremas 4.3 e 4.5. O limiar efetivo $\varepsilon_0' = \min(\varepsilon_0, c_{low}\, \varepsilon_1^2)$ assegura simultaneamente que $\eta(g) \leq \varepsilon_0$ — aplicando o Teorema 4.3, com a condição de conexidade satisfeita pela Observação 4.4 — e que $\|\psi\|_{H^2} < \varepsilon_1$ — aplicando o Teorema 4.5. A cota superior combina o Teorema 4.3 com a comparação de medidas (Lema 3.3); a cota inferior é o Teorema 4.5. □

Corolário 4.7 (Equivalência espectral). Para superfície hiperbólica compacta (M, g_0) de gênero $\gamma \geq 2$ com $K_{g_0} = -\kappa_0$, $\kappa_0 > 0$, são equivalentes:

- (i) $\lambda_1(J) > 0$ sobre $H_0^2(M)$;
- (ii) existem $\varepsilon_0 > 0$ e $0 < c \leq C < \infty$ tais que $c\|\psi\|_{H^2}^2 \leq \eta(g) \leq C\|\psi\|_{H^2}^2$ para todo $\psi \in H_0^2(M)$ com $\eta(g) \leq \varepsilon_0$;
- (iii) a variância intrínseca η realiza a norma do grafo de J como métrica local sobre a classe conforme: $\eta(g) \simeq \|\psi\|_{H^2}^2$ no regime perturbativo.

Para gênero $\gamma \geq 2$, as três condições valem incondicionalmente, pois $\lambda_1(J) = \mu_1 + 2\kappa_0 > 0$. A rigidez quantitativa da métrica hiperbólica dentro de sua classe conforme é, portanto, consequência direta e exclusiva de um único dado espectral: a positividade do gap spectral do operador de Jacobi.

4.4. Constante Ótima de Coercividade

Proposição 4.8 (Constante ótima). Seja (M, g_0) superfície hiperbólica compacta com $K_{g_0} = -\kappa_0$, $\kappa_0 > 0$, e $J = -\Delta_{g_0} + 2\kappa_0$ com autovalores $\lambda_j(J) = \mu_j + 2\kappa_0$. Define-se

$$R(\mu, \kappa_0) := \frac{(\mu + 2\kappa_0)^2}{1 + \mu + \mu^2}.$$

Então: (i) a constante ótima c_{opt}^2 em $\|J\psi\|_{L^2}^2 \geq c_{opt}^2 \|\psi\|_{H^2}^2$ é $c_{opt}^2 = \inf_{j \geq 1} R(\mu_j, \kappa_0) = 1$; (ii) o ínfimo é alcançado apenas no limite assintótico, com $\lim_{j \to \infty} R(\mu_j, \kappa_0) = 1$; (iii) para $\kappa_0 \geq 1/2$, a função $\mu \mapsto R(\mu, \kappa_0)$ é estritamente decrescente em $(0, \infty)$; logo $\inf_{j \geq 1} R(\mu_j, \kappa_0) = R(\mu_1, \kappa_0) > 1$. O modo mais coercivo é, portanto, o mais baixo.

Prova. A função $R(\mu, \kappa_0)$ aparece como a razão $\|Je_j\|_{L^2}^2 / \|e_j\|_{H^2}^2$ quando e_j é a j-ésima autofunção: $\|Je_j\|_{L^2}^2 = (\mu_j + 2\kappa_0)^2$ e $\|e_j\|_{H^2}^2 = 1 + \mu_j + \mu_j^2$.

Para a monotonicidade, calcula-se $\partial_\mu R = (\mu + 2\kappa_0)[2 - 2\kappa_0 + \mu(1 - 4\kappa_0)] / (1 + \mu + \mu^2)^2$. O fator $(\mu + 2\kappa_0)$ é positivo para $\mu > 0$. O colchete $N(\mu) = 2 - 2\kappa_0 + \mu(1 - 4\kappa_0)$ satisfaz, para $\kappa_0 \geq 1/2$: $N(0) = 2 - 2\kappa_0 \leq 0$ e o coeficiente de μ é $1 - 4\kappa_0 \leq -1 < 0$; logo $N(\mu) < 0$ para todo $\mu > 0$; assim, $\partial_\mu R < 0$. Para $\kappa_0 < 1/2$, $N(\mu)$ anula-se em $\mu^* = (2 - 2\kappa_0) / (4\kappa_0 - 1)$; esse intervalo fica fora da configuração hiperbólica, mas a fórmula aplica-se ao arcabouço abstrato.

No caso hiperbólico, $\kappa_0 \geq 1$ (Gauss-Bonnet obriga $\kappa_0 \geq 1$ para $\gamma \geq 2$ com normalização de área $Area = 4\pi(\gamma - 1) / \kappa_0$; a normalização padrão $K_{g_0} = -1$ dá $\kappa_0 = 1$), logo R é estritamente decrescente e $\inf_{j \geq 1} R(\mu_j, \kappa_0) = \lim_{j \to \infty} R(\mu_j, \kappa_0) = \lim_{\mu \to \infty} (\mu + 2\kappa_0)^2 / (1 + \mu + \mu^2) = 1$. O ínfimo é aproximado, mas alcançado apenas no limite assintótico sobre o espectro discreto, pois cada $R(\mu_j, \kappa_0) > 1$ para μ_j finito. □

Observação 4.9 (Saturação ultravioleta e dominância infravermelha). A razão de coercividade $R(\mu, \kappa_0)$ exibe dois regimes distintos. No regime infravermelho, o modo mais baixo μ_1 maximiza R, fornecendo $R(\mu_1, \kappa_0) > 1$. Esse é o modo mais coercivo: perturbações conformes de baixa frequência são estritamente mais bem controladas pelo operador de Jacobi do que pela norma de Sobolev pura. No regime ultravioleta, quando $\mu \to \infty$, $R(\mu, \kappa_0) \to 1$: o fundo de curvatura κ_0 torna-se negligenciável frente a μ e a desigualdade de coercividade aproxima-se da equivalência entre $\|J\psi\|_{L^2}^2$ e o quadrado da norma H^2 pura. A desigualdade é, portanto, assintoticamente saturada por modos de alta frequência.

A constante ótima $c_{opt}^2 = 1$ é determinada pela assintótica de alta frequência do espectro, não pelo menor autovetor. Este último controla o gap spectral e a taxa dinâmica, mas não a razão ótima de coercividade. A rigidez conforme é fenômeno infravermelho; a constante de coercividade, por sua vez, é ultravioleta. O fato de $c_{opt}^2 = 1$ ser alcançado apenas no limite assintótico reflete uma rigidez ultravioleta; a amplificação $R(\mu_1, \kappa_0) > 1$ captura, por sua vez, uma amplificação infravermelha governada pelos modos de baixa frequência.

4.5. Cálculo Explícito na Superfície de Bolza

A superfície de Bolza M_B é a superfície de Riemann compacta de gênero dois com o maior grupo de automorfismos — $Aut(M_B) \cong GL(2,3)$, de ordem 48. Ela carrega sua métrica hiperbólica única com $K_{g_0} = -1$ ($\kappa_0 = 1$) e área $Area(M_B) = 4\pi$ por Gauss-Bonnet.

Dados espectrais. O primeiro autovalor positivo de $-\Delta_g$ satisfaz $\mu_1(M_B) \approx 3,839$. Em $L^2(M_B)$ (modo constante incluído): $\lambda_{min}(J) = 2\kappa_0 = 2$. Em $H^2_0(M_B)$ (média nula; gap operativo para o teorema principal): $\lambda_1(J) = \mu_1 + 2\kappa_0 \approx 5,839$.

Razão espectral. Para $\kappa_0 = 1$ e $\mu_1 \approx 3,839$:

$$R(\mu_1, 1) = \frac{(3,839 + 2)^2}{1 + 3,839 + 3.839^2} \approx \frac{34,10}{19,59} \approx 1,741\,.$$

Interpretação. O valor $R(\mu_1, 1) \approx 1,741 > 1$ confirma que o modo mais baixo é estritamente mais coercivo do que o valor assintótico. O fato de $c^2_{opt} = 1$ ser alcançado apenas no limite assintótico reflete a saturação ultravioleta descrita na Observação 4.9: a desigualdade $\|J\psi\|^2_{L^2} \geq \|\psi\|^2_{H^2}$ é assintoticamente justa, mas estritamente estrita sobre qualquer modo finito.

4.6. Interpretação Via Norma do Grafo e Conexões

A segunda variação da energia de Calabi em g_0 é $D^2C|_{\psi=0}(\delta\psi, \delta\psi) = \| J\delta\psi \|^2_{L^2}$. A norma do grafo de J é $\| \psi \|^2_{G(J)} := \| \psi \|^2_{L^2} + \| J\psi \|^2_{L^2}$. Como $\lambda_{min}(J) > 0$, a regularidade elíptica fornece $\| \psi \|_{G(J)} \approx \| \psi \|_{H^2}$. O Teorema 4.6 afirma que η — definida geometricamente e intrinsecamente computável — realiza a norma do grafo de um operador elíptico como métrica local sobre a classe conforme.

Explicitamente, a norma do domínio de J é $\| \psi \|^2_{D(J)} := \| \psi \|^2_{L^2} + \| J\psi \|^2_{L^2}$ e a equivalência $\| \psi \|_{D(J)} \approx \| \psi \|_{H^2}$ sobre $H^2_0(M)$ segue da estimativa elíptica do Lema 3.4.

Na linguagem das formas fechadas positivas (Kato, 1995), o funcional quadrático $q(\psi) := \| J\psi \|^2_{L^2}$ com domínio $D(q) = H^2_0(M) \subset L^2(M, g_0)$ é uma forma fechada, densamente definida, estritamente positiva. Pelo teorema da representação (Kato, 1995), o par $(q, D(q))$ determina unicamente o operador autoadjunto $A = J^2$ e, com ele, todo o conteúdo espectral quadrático: autovalores, semigrupo e^{-tA}, resolvente e covariância de flutuação A^{-1}. No regime perturbativo $\| \psi \|_{H^2} < \varepsilon_0$, o Teorema 4.6 estabelece equivalência completa entre a variância intrínseca η e a forma fechada q; portanto, η codifica toda a informação quadrática local da deformação conforme sem perda. Essa classificação é restrita ao regime perturbativo; se ela se estende globalmente é o conteúdo do Problema em aberto 4.1 adiante.

Observação 4.10 (Estrutura de Kato). A estimativa bilateral opera dentro da correspondência padrão entre formas fechadas positivas e operadores autoadjuntos. O conteúdo do Teorema 4.6 é a redução explícita não linear-para-linear que situa η nesse arcabouço com constantes computáveis.

Problemas em aberto.

Problema 4.1 (Coercividade global). Vale $\eta \approx \| \psi \|^2_{H^2}$ sem a hipótese de pequenez $\eta \leq \varepsilon_0$?

Problema 4.2 (Convergência quantitativa do fluxo). O fluxo gradiente $\partial_t \psi = -\nabla \eta = -2J^2 \psi + (\text{termos não lineares})$ admite análise de convergência quantitativa via estabilidade do módulo mínimo de $DR(\psi)$ sobre o subespaço de média nula $H^2_0(M)$. A estimativa-chave é

$$\inf \{\frac{\| DR(\psi)h \|}{\| h \|} : h \in H_0^2, h \neq 0\} \geq \lambda_1(J)(1 - MC_{ell} \| \psi \|_{H^2}^2),$$

que vale sob continuidade Lipschitz de DR — consequência da estrutura de álgebra de Sobolev em dimensão dois — e fornece desigualdade de gradiente $\| \nabla\eta \| \geq 2\tilde{c}(\sigma)\sqrt{\eta}$ de tipo Łojasiewicz-Simon com expoente $\theta = 1/2$, sem exigir analiticidade real. O problema remanescente consiste em calcular o raio de aprisionamento σ explícito e a constante efetiva $\tilde{c}(\sigma) = \lambda_1(J)(1 - MC_{ell}\,\sigma)(1 - C_{corr}\,\sigma)$ para o modelo conforme deste artigo, e em estabelecer a estimativa de aprisionamento que garanta que a órbita permaneça no regime perturbativo. Isso fornece convergência exponencial com taxa explícita $\gamma \to 2\lambda_1(J)^2$ quando $\sigma \to 0$, conectando a coercividade bilateral do Teorema 4.6 à dinâmica de longo prazo do fluxo de curvatura. O arcabouço abstrato e a demonstração de convergência serão desenvolvidos em artigo complementar (Thimotéo, no prelo).

Problema 4.3 (Precisão de c_{opt}). Construir sequência $\psi_n \in H_0^2(M)$ com $\eta(g_n) / \| \psi_n \|_{H^2}^2 \to c_{opt}^2 = 1$ ou demonstrar que a constante assintótica é alcançada apenas no limite no nível não linear.

Problema 4.4 (Coercividade infravermelha próxima ao limite de Selberg). Determinar o comportamento assintótico de $R(\mu_1, \kappa_0)$ quando $\mu_1 \to 1/4$ e relacioná-lo a fenômenos de concentração espectral em superfícies hiperbólicas aleatórias. Para $\mu_1 = 1/4$ — limite inferior conjectural para superfícies compactas aritméticas, cf. a conjectura de autovalores de Selberg — e $\kappa_0 = 1$:

$$R(1/4, 1) = \frac{(1/4 + 2)^2}{1 + 1/4 + 1/16} = \frac{(9/4)^2}{21/16} = \frac{81}{16} \cdot \frac{16}{21} = \frac{81}{21} = \frac{27}{7} \approx 3,857.$$

Esse valor é mais que o dobro do valor de Bolza ($\approx 1,741$), o que sugere que superfícies com pequeno gap espectral exibem coercividade infravermelha significativamente mais forte. Uma descrição quantitativa dessa amplificação sobre M_g, em conexão com resultados de concentração espectral, permanece em aberto.

Conexões com temas correlatos.

Escopo dimensional. O argumento das Seções 3 e 4 depende da imersão de Sobolev $H^2(M) \hookrightarrow C^0(M)$, específica da dimensão $d = 2$ (o expoente crítico de Sobolev satisfaz $2 > d/2 = 1$). Em dimensão $d \geq 3$, a imersão $H^2 \hookrightarrow C^0$ falha em geral, a propriedade de álgebra de Banach de H^2 se perde e as estimativas não lineares dos Lemas 3.2 e 3.3 não se transferem diretamente. Qualquer extensão à geometria conforme em dimensão superior exigiria ferramentas analíticas distintas.

Gaps espectrais em superfícies hiperbólicas aleatórias. A constante ótima $c_{opt}^2 = 1$ é universal — independente da superfície — mas a razão espectral infravermelha $R(\mu_1, \kappa_0)$, que mede o excesso de coercividade do modo mais baixo, depende do espectro de $-\Delta_{g_0}$ e, portanto, varia sobre o espaço de módulos M_g de superfícies hiperbólicas de gênero g. Trabalhos recentes sobre gaps espectrais fornecem previsões quantitativas para essa variação. Hide e Magee (2023) demonstraram que coberturas riemannianas aleatórias de uma superfície hiperbólica não compacta apresentam novos autovalores abaixo de $1/4 - \varepsilon$ com probabilidade tendendo a um. Hide, Macera e Thomas (2025) demonstraram que superfícies de Weil-Petersson aleatórias de gênero g têm gap espectral pelo menos $1/4 - O(g^{-c})$ para algum $c > 0$, com probabilidade tendendo a um, estabelecendo concentração com taxa polinomial. Sob essa concentração, a razão infravermelha satisfaz $R(\mu_1, \kappa_0) = R(1/4 - O(g^{-c}), \kappa_0)$, convergindo a $R(1/4, \kappa_0)$ com taxa polinomial em g. Isso conecta o problema interno deste artigo — a dependência de $R(\mu_1, \kappa_0)$ com a superfície — ao programa ativo de geometria espectral de superfícies hiperbólicas aleatórias.

Ação de Liouville e geometria de Teichmüller. A geometria natural para estudar $R(\mu_1, \kappa_0)$ como função sobre M_g é a métrica de Weil-Petersson. Takhtajan e Teo (2006) demonstraram que a ação de Liouville é um potencial de Kähler para a métrica de Weil-Petersson sobre o espaço de Teichmüller universal. Como o operador de estabilidade de Liouville $\tilde{J} = -\Delta_{g_0} + \kappa_0$ governa a segunda variação dessa mesma ação no ponto crítico de curvatura constante, a geometria do problema de otimizar $R(\mu_1, \kappa_0)$ sobre M_g é governada por $\tilde{J}$, que é o parceiro espectral de J_{can} via o deslocamento $J_{can} = \tilde{J} + \kappa_0$.

Gravidade de Jackiw-Teitelboim. A energia de curvatura $\eta(g) = \| K_g + \kappa_0 \|_{L^2}^2$ é a violação L^2 ao quadrado da equação de movimento de Jackiw-Teitelboim $R + 2\Lambda = 0$ (Jackiw, 1985; Teitelboim, 1983), com $\Lambda = -\kappa_0$. Expandindo, $\eta = \int R^2 d\mu + 4\kappa_0 \int R d\mu + 4\kappa_0^2 \,\mathrm{Area}(M)$. Como $\int R d\mu = 4\pi\chi(M)$ (Gauss-Bonnet) e $\mathrm{Area}(M)$ são topologicamente fixos dentro de uma classe conforme, η equivale a uma ação R^2 a menos de termos topológicos e de volume. O operador $J_{can} = -\Delta_{g_0} + 2\kappa_0$ governa a estabilidade linear da solução de curvatura constante, e a estimativa bilateral do Teorema 4.6 fornece a caracterização espectral completa do regime perturbativo quadrático desse funcional.

Decomposição estática-dinâmica. A estimativa bilateral do Teorema 4.6 é um resultado estático: caracteriza o panorama energético de η

perto da métrica hiperbólica, mas não aborda a evolução temporal do fluxo gradiente. Um artigo complementar (Thimotéo, no prelo) estabelece a contrapartida dinâmica demonstrando que o módulo mínimo da linearização $DR(\psi) = e^{-2\psi} J + \text{(ordem inferior)}$ persiste quantitativamente em $H_0^2(M)$ para $\| \psi \|_{H^2} < \delta$, com cota inferior explícita convergindo a $\lambda_1(J)$ quando $\sigma \to 0$. Essa persistência induz uma desigualdade de gradiente do tipo Łojasiewicz-Simon com $\theta = 1/2$ e constantes espectrais explícitas, da qual segue a convergência exponencial do fluxo com taxa controlada por $\lambda_1(J)^2$. O mecanismo dispensa o maquinário clássico de Łojasiewicz-Simon — analiticidade real, preparação de Weierstrass —, apoiando-se apenas na estabilidade $\inf$ - $\sup$ de $DR(\psi)$ sob perturbação, usando somente a regularidade C^2 e a estrutura lipschitziana já presentes em (H1)-(H4).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O artigo demonstra uma estimativa de coercividade bilateral quantitativa para o operador de Jacobi sobre o subespaço de média nula da classe conforme de superfícies hiperbólicas compactas de gênero maior ou igual a dois. A estimativa vale no regime perturbativo em H^2, com constantes explícitas dependentes apenas da estrutura elíptica do operador e do primeiro autovalor do laplaciano geométrico.

O mecanismo governante reduz-se a uma única condição espectral — a positividade do primeiro autovalor do operador no subespaço de média nula —, que é simultaneamente suficiente e necessária para a estimativa bilateral no regime perturbativo. A variância intrínseca de curvatura e o funcional quadrático linearizado são equivalentes em ordem principal, diferindo por termos de ordem cúbica.

A constante ótima assintótica de coercividade vale um, alcançada apenas no limite assintótico dos autovalores do laplaciano. O supremo da razão espectral corresponde ao modo de mais baixa frequência, amplificado no regime infravermelho. O cálculo explícito na superfície de Bolza confirma o fenômeno com razão espectral aproximadamente igual a um vírgula setecentos e quarenta e um.

O resultado caracteriza a energia de Calabi restrita à classe conforme como realização local da norma do grafo do operador de Jacobi, estabelecendo equivalência quantitativa entre a rigidez conforme e a completude espectral no regime perturbativo. A classificação estende-se naturalmente ao arcabouço abstrato de funcionais do tipo resíduo quadrático com linearização elíptica e gap espectral, abarcando situações análogas em Yang-Mills e em métricas de Einstein.

O trabalho deixa em aberto quatro direções: a extensão da estimativa para o regime global sem hipótese de pequenez; a análise quantitativa de convergência do fluxo gradiente associado; a construção de sequências que saturem a constante ótima no nível não linear; e a caracterização do comportamento da razão espectral infravermelha próximo ao limite conjectural de Selberg, em conexão com concentração espectral em superfícies aleatórias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. *Sobolev spaces*. 2nd ed. Amsterdam: Academic Press, 2003. (Pure and Applied Mathematics, v. 140).

AUBIN, Thierry. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

BESSE, Arthur L. *Einstein manifolds*. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

BIANCHI, Gabriele; EGNELL, Henrik. A note on the Sobolev inequality. *Journal of Functional Analysis*, v. 100, n. 1, p. 18-24, 1991.

BOURGUIGNON, Jean-Pierre; LAWSON, H. Blaine. Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields. *Communications in Mathematical Physics*, v. 79, n. 2, p. 189-230, 1981.

CALABI, Eugenio. Extremal Kähler metrics. *In*: YAU, Shing-Tung (ed.). *Seminar on Differential Geometry*. Princeton: Princeton University Press, 1982. p. 259-290. (Annals of Mathematics Studies, 102).

CHEN, Xiuxiong. Calabi flow in Riemann surfaces revisited: a new point of view. *International Mathematics Research Notices*, v. 2001, n. 6, p. 275-297, 2001.

CHRUŚCIEL, Piotr. Semi-global existence and convergence of solutions of the Robinson-Trautman equation. *Communications in Mathematical Physics*, v. 137, n. 2, p. 289-313, 1991.

COLDING, Tobias H. Shape of manifolds with positive Ricci curvature. *Inventiones Mathematicae*, v. 124, n. 1, p. 175-191, 1996.

FRANK, Rupert L.; KÖNIG, Tobias. Sharp quantitative stability of the Dirichlet spectrum near the ball. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 77, n. 9, p. 3701-3724, 2024.

FUSCO, Nicola; MAGGI, Francesco; PRATELLI, Aldo. The sharp quantitative isoperimetric inequality. *Annals of Mathematics*, v. 168, n. 3, p. 941-980, 2008.

GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2nd ed. (revised). Berlin: Springer, 2001. (Classics in Mathematics).

HIDE, Will; MACERA, Davide; THOMAS, Joe. *Spectral gap with polynomial rate for Weil-Petersson random surfaces*. 2025. Pré-publicação. arXiv:2508.14874. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2508.14874. Acesso em: 22 abr. 2026.

HIDE, Will; MAGEE, Michael. Near optimal spectral gaps for hyperbolic surfaces. *Annals of Mathematics*, v. 198, n. 2, p. 791-824, 2023.

JACKIW, Roman. Lower dimensional gravity. *Nuclear Physics B*, v. 252, p. 343-356, 1985.

KATO, Tosio. *Perturbation theory for linear operators*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1995. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 132).

KOISO, Norihito. Non-deformability of Einstein metrics. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 15, n. 2, p. 419-433, 1978.

KOISO, Norihito. Rigidity and stability of Einstein metrics: the case of compact symmetric spaces. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 17, n. 1, p. 51-73, 1980.

OSGOOD, Brad; PHILLIPS, Ralph; SARNAK, Peter. Extremals of determinants of Laplacians. *Journal of Functional Analysis*, v. 80, n. 1, p. 148-211, 1988.

REED, Michael; SIMON, Barry. *Methods of modern mathematical physics, vol. IV: analysis of operators*. New York: Academic Press, 1978.

SIMON, Leon. Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems. *Annals of Mathematics*, v. 118, n. 3, p. 525-571, 1983.

STROHMAIER, Alexander; USKI, Ville. An algorithm for the computation of eigenvalues, spectral zeta functions and zeta-determinants on hyperbolic surfaces. *Communications in Mathematical Physics*, v. 317, n. 3, p. 827-869, 2013.

STRUWE, Michael. *Variational methods*. 4th ed. Berlin: Springer, 2008. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 34).

TAKHTAJAN, Leon A.; TEO, Lee-Peng. *Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space*. Providence: American Mathematical Society, 2006. (Memoirs of the American Mathematical Society, v. 183, n. 861).

TEITELBOIM, Claudio. Gravitation and Hamiltonian structure in two spacetime dimensions. *Physics Letters B*, v. 126, n. 1-2, p. 41-45, 1983.

THIMOTÉO, Mario C. G. *Quantitative convergence of gradient flows for squared-residual functionals via inf-sup stability*. No prelo.

[1] Engenheiro agrônomo pela Universidade Estadual de Londrina, engenheiro de segurança do trabalho e possui MBA Executivo pela Fundação Getulio Vargas. Atuou como professor de ensino superior vinculado à Fundação Gammon de Ensino. E-mail: acesse o artigo original para visualizar o e-mail