

**EXPLORAÇÃO INTUITIVA DE
PROBLEMAS (EIP): UMA
METODOLOGIA PARA
SUPERAR A LACUNA ENTRE
CONHECIMENTO
PROCEDIMENTAL E
COMPREENSÃO
CONCEITUAL NA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**INTUITIVE PROBLEM EXPLORATION (IPE): A METHODOLOGY TO BRIDGE
THE GAP BETWEEN PROCEDURAL KNOWLEDGE AND CONCEPTUAL
UNDERSTANDING IN MATHEMATICS EDUCATION**

Ciências Exatas e da Terra, Ciências Humanas • 18/03/2026

REGISTRO DOI: [10.70773/revistatopicos/773812048](https://doi.org/10.70773/revistatopicos/773812048)

Josnei Francisco Peruzzo¹

RESUMO

A defasagem entre o conhecimento procedimental e a compreensão conceitual na educação matemática é um desafio persistente. Este artigo apresenta e fundamenta teoricamente a Exploração Intuitiva de Problemas (EIP), uma metodologia pedagógica concebida para superar essa lacuna. A EIP estrutura-se em um ciclo iterativo que começa com um problema inicial simples, que é subsequentemente modificado de forma sistemática para aumentar sua complexidade e escopo. O objetivo primordial desta abordagem é simular o ciclo de investigação e generalização inerente à prática do matemático, engajando o estudante em um processo ativo de conjectura, teste e dedução. A EIP está solidamente ancorada no Construtivismo (que exige a ação do aluno sobre o objeto de estudo), na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (utilizando o problema inicial como subsunçor cognitivo) e na Heurística de Polya (pela ênfase no Retrospecto e na variação). A EIP busca facilitar a transição de uma compreensão aditiva e procedimental para uma compreensão estrutural e relacional, promovendo uma aprendizagem matemática genuína. A metodologia exige uma profunda redefinição do papel docente, transformando-o de transmissor de conteúdo em mediador e arquiteto de perturbações cognitivas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Compreensão Conceitual. Conhecimento Procedimental. Metodologia de Ensino. Construtivismo.

ABSTRACT

The gap between procedural knowledge and conceptual understanding in mathematics education is a persistent challenge. This article presents and theoretically grounds the Intuitive Problem Exploration (IPE), a pedagogical methodology designed to overcome

this gap. IPE is structured as an iterative cycle that begins with a simple initial problem, which is subsequently modified systematically to increase its complexity and scope. The primary objective of this approach is to simulate the cycle of investigation and generalization inherent to mathematical practice, engaging students in an active process of conjecture, testing, and deduction. IPE is solidly anchored in Constructivism (which requires student action upon the object of study), Ausubel's Meaningful Learning Theory (using the initial problem as a cognitive subsumer), and Polya's Heuristics (emphasizing retrospection and variation). IPE seeks to facilitate the transition from an additive and procedural understanding to a structural and relational understanding, promoting genuine mathematical learning. The methodology requires a profound redefinition of the teacher's role, transforming it from a content transmitter to a mediator and architect of cognitive perturbations.

Keywords: Mathematics Education. Procedural Knowledge. Conceptual Understanding. Constructivism. Meaningful Learning. Polya's Heuristics.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Contextualização

A educação matemática contemporânea enfrenta um desafio persistente e multifacetado: a significativa disparidade entre a capacidade dos estudantes de executar procedimentos matemáticos e sua compreensão conceitual dos princípios fundamentais que sustentam esses procedimentos. Este fenômeno, amplamente documentado na literatura especializada (Skemp, 1976; Schoenfeld, 1988; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Star, 2005),

manifesta-se quando alunos conseguem aplicar algoritmos corretamente e reproduzir fórmulas em contextos familiares, mas demonstram dificuldade em transferir esse conhecimento para novas situações, explicar o raciocínio subjacente ou conectar diferentes representações do mesmo conceito matemático.

Esta discrepância não representa apenas uma falha pedagógica circunscrita, mas constitui um obstáculo fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático autêntico. Conforme observado por Tall (2013), a verdadeira compreensão matemática transcende a mera aplicação de fórmulas e algoritmos, envolvendo a capacidade de perceber relações estruturais, generalizar conceitos e navegar flexivelmente entre diferentes representações. Quando os estudantes possuem apenas conhecimento procedimental sem a correspondente compreensão conceitual, sua relação com a matemática torna-se frágil, instrumentalizada e desprovida de significado (Boaler, 2016).

As implicações desta lacuna são profundas e de longo alcance. Em primeiro lugar, ela limita severamente a autonomia intelectual dos estudantes, tornando-os dependentes de instruções explícitas e incapazes de adaptar seu conhecimento a situações novas ou não-padronizadas. Em segundo lugar, compromete a retenção do conhecimento matemático, uma vez que procedimentos aprendidos sem compreensão conceitual são mais suscetíveis ao esquecimento (Hiebert & Lefevre, 1986). Em terceiro lugar, contribui para a perpetuação de atitudes negativas em relação à matemática, reforçando a percepção de que esta disciplina consiste primordialmente em regras arbitrárias a serem memorizadas, em vez de um sistema coerente e significativo de ideias interconectadas (Boaler, 2015).

1.2. Relevância e Justificativa

A relevância de abordar esta lacuna entre procedimento e conceito é amplificada pelo contexto educacional contemporâneo, caracterizado por demandas crescentes por pensamento crítico, resolução criativa de problemas e adaptabilidade cognitiva. As habilidades matemáticas requeridas no século XXI transcendem a mera execução de procedimentos padronizados, exigindo uma compreensão profunda e flexível que permita a aplicação do conhecimento matemático em contextos diversos e frequentemente imprevisíveis (Schoenfeld, 2016).

Adicionalmente, pesquisas recentes em neurociência cognitiva (Dehaene, 2011) e psicologia educacional (Siegler, 2003) têm ressaltado a importância da integração entre diferentes tipos de conhecimento matemático para o desenvolvimento de competências matemáticas robustas. Estas investigações sugerem que a dicotomia tradicional entre conhecimento procedimental e conceitual é uma simplificação excessiva, e que uma compreensão matemática genuína emerge da interação dinâmica e bidirecional entre estes dois domínios.

Neste contexto, torna-se imperativo desenvolver abordagens pedagógicas que possam efetivamente superar esta lacuna, promovendo uma aprendizagem matemática que integre harmoniosamente procedimento e conceito. Tais abordagens devem não apenas facilitar a aquisição de habilidades técnicas, mas também cultivar uma compreensão profunda das estruturas e relações matemáticas subjacentes, preparando os estudantes para os desafios cognitivos de um mundo em rápida transformação.

Neste artigo, apresento a Exploração Intuitiva de Problemas (EIP) como uma metodologia pedagógica inovadora especificamente concebida para reduzir, ou quiçá eliminar, a lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual na educação matemática. A EIP não é simplesmente uma técnica didática isolada, mas uma estrutura epistemológica abrangente que reconhece a natureza construída do conhecimento matemático e busca replicar, no ambiente educacional, os processos cognitivos que caracterizam a investigação matemática autêntica.

2. REVISÃO DA LITERATURA: A LACUNA ENTRE PROCEDIMENTO E CONCEITO

2.1. Definições e Distinções Conceituais

A discussão sobre a lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual requer, inicialmente, uma clarificação destes construtos e suas relações. Embora diversos autores utilizem terminologias ligeiramente distintas, existe um consenso substancial sobre as características essenciais destes dois tipos de conhecimento matemático.

O conhecimento procedimental refere-se à familiaridade com os símbolos, regras, algoritmos e procedimentos utilizados para resolver problemas matemáticos (Hiebert & Lefevre, 1986). Este tipo de conhecimento é frequentemente caracterizado por sua natureza sequencial e orientada à ação, envolvendo a capacidade de executar uma série de passos para atingir um resultado específico. Ele inclui o domínio de técnicas computacionais, a manipulação de expressões algébricas, a aplicação de fórmulas e a execução de algoritmos padronizados.

Por outro lado, a compreensão conceitual refere-se ao entendimento das ideias matemáticas fundamentais, suas relações e os princípios que governam um domínio matemático (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Este tipo de conhecimento é caracterizado por sua natureza relacional e estrutural, envolvendo a percepção de conexões entre diferentes conceitos, representações e procedimentos. Ele inclui a compreensão do significado dos símbolos e operações matemáticas, a capacidade de justificar procedimentos, e o reconhecimento de quando e por que determinadas estratégias são aplicáveis.

Skemp (1976), em seu influente trabalho, introduziu a distinção entre "compreensão instrumental" (saber como, sem necessariamente saber por quê) e "compreensão relacional" (saber tanto como quanto por quê), que corresponde aproximadamente à distinção entre conhecimento procedimental e conceitual. Ele argumentou que, embora a compreensão instrumental possa oferecer recompensas imediatas em termos de rapidez e facilidade de aprendizagem, a compreensão relacional proporciona benefícios mais substanciais e duradouros, incluindo maior adaptabilidade a novas tarefas e maior satisfação intelectual.

É importante ressaltar, contudo, que pesquisas mais recentes têm questionado a dicotomia rígida entre procedimento e conceito, sugerindo uma relação mais complexa e bidirecional entre estes dois tipos de conhecimento (Baroody, Feil, & Johnson, 2007; Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Estas investigações indicam que o conhecimento procedimental e a compreensão conceitual desenvolvem-se de maneira iterativa e mutuamente reforçadora, com avanços em um domínio frequentemente catalisando progressos no outro.

2.2. Manifestações da Lacuna na Educação Matemática

A lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual manifesta-se de diversas formas no contexto educacional, afetando significativamente a qualidade da aprendizagem matemática dos estudantes. Algumas das manifestações mais proeminentes incluem:

2.2.1. Aplicação Mecânica de Procedimentos

Estudantes frequentemente aplicam procedimentos matemáticos de maneira mecânica e ritualística, sem compreender o significado ou a justificativa subjacente (Schoenfeld, 1988). Este fenômeno é particularmente evidente quando os alunos são confrontados com problemas ligeiramente diferentes daqueles encontrados durante o treinamento, revelando a fragilidade de seu conhecimento. Por exemplo, um estudante pode aplicar corretamente a fórmula da área de um triângulo ($A = b \times h/2$) em exercícios padronizados, mas ser incapaz de adaptar este conhecimento quando confrontado com um triângulo posicionado de maneira não convencional.

2.2.2. Compartimentalização do Conhecimento

Os estudantes frequentemente mantêm seu conhecimento matemático em compartimentos isolados, falhando em reconhecer conexões entre diferentes tópicos ou representações (Silver, 1986). Esta compartimentalização impede a transferência de aprendizagem e o desenvolvimento de uma visão coerente e integrada da matemática. Por exemplo, um aluno pode compreender o conceito de função em contextos algébricos, mas falhar em reconhecer manifestações deste mesmo conceito em contextos geométricos ou estatísticos.

2.2.3. Dificuldade em Explicar e Justificar

Estudantes que possuem principalmente conhecimento procedimental frequentemente demonstram dificuldade em explicar ou justificar suas soluções (Ball & Bass, 2003). Quando questionados sobre o raciocínio subjacente a um procedimento, estes alunos tendem a recitar os passos do algoritmo em vez de articular os princípios matemáticos relevantes. Esta limitação revela-se particularmente problemática em situações que requerem comunicação matemática e argumentação lógica.

2.2.4. Dependência Excessiva de Dicas Contextuais

Na ausência de compreensão conceitual robusta, os estudantes frequentemente baseiam suas estratégias de resolução de problemas em características superficiais ou dicas contextuais, em vez de analisar a estrutura matemática subjacente (Schoenfeld, 1992). Esta abordagem resulta em uma aplicação indiscriminada de procedimentos, independentemente de sua adequação à situação específica. Por exemplo, ao resolver problemas verbais, os alunos podem simplesmente identificar palavras-chave (como "mais" ou "menos") para decidir qual operação aritmética aplicar, sem considerar o significado global do problema.

2.2.5. Fragilidade da Retenção

O conhecimento procedimental aprendido sem compreensão conceitual correspondente tende a ser mais suscetível ao esquecimento (Hiebert & Lefevre, 1986). Sem uma rede conceitual que ancore e dê significado aos procedimentos, os estudantes frequentemente necessitam reaprender técnicas previamente dominadas após períodos de não-utilização. Esta fragilidade de

retenção compromete significativamente a progressão cumulativa da aprendizagem matemática.

2.3. Causas da Lacuna: Fatores Pedagógicos e Institucionais

A persistência da lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual pode ser atribuída a uma confluência de fatores pedagógicos e institucionais que caracterizam muitos sistemas educacionais contemporâneos. Alguns dos fatores mais significativos incluem:

2.3.1. Tradições Pedagógicas

As abordagens tradicionais de ensino de matemática frequentemente priorizam a transmissão de procedimentos sobre o desenvolvimento de compreensão conceitual (Stigler & Hiebert, 1999). Esta ênfase procedimental manifesta-se em práticas como a demonstração de algoritmos padronizados seguida de extensiva prática repetitiva, com limitada exploração dos princípios subjacentes ou conexões com outros conhecimentos matemáticos.

2.3.2. Pressões de Avaliação

Sistemas de avaliação que enfatizam a rapidez e precisão na execução de procedimentos padronizados incentivam práticas pedagógicas focadas no treinamento procedimental (Shepard, 2000). Quando o sucesso educacional é medido primariamente pela capacidade de produzir respostas corretas em testes cronometrados, tanto professores quanto estudantes tendem a priorizar a eficiência procedimental sobre a compreensão profunda.

2.3.3. Limitações de Tempo e Recursos

Restrições práticas, como turmas numerosas e tempo limitado de instrução, frequentemente levam os educadores a adotar abordagens mais diretivas e procedimentais, que são percebidas como mais eficientes para cobrir o conteúdo curricular obrigatório (Darling-Hammond, 2010). O desenvolvimento de compreensão conceitual tipicamente requer mais tempo e recursos, incluindo oportunidades para exploração, discussão e reflexão, que podem ser difíceis de acomodar em ambientes educacionais com recursos limitados.

2.3.4. Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Muitos educadores possuem um conhecimento pedagógico do conteúdo matemático que é insuficiente para facilitar efetivamente o desenvolvimento de compreensão conceitual (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Sem um entendimento profundo dos conceitos matemáticos e das formas como os estudantes os compreendem e desenvolvem, os professores podem inadvertidamente perpetuar práticas que privilegiam o conhecimento procedimental isolado.

2.3.5. Crenças Epistemológicas

Crenças epistemológicas sobre a natureza da matemática e sua aprendizagem influenciam significativamente as práticas pedagógicas (Philipp, 2007). Quando a matemática é concebida primariamente como um conjunto de regras e procedimentos a serem memorizados, em vez de um sistema dinâmico de ideias interconectadas, as práticas de ensino tendem a refletir e reforçar esta concepção limitada.

2.4. Abordagens Existentes para Superar a Lacuna

Diversos pesquisadores e educadores têm proposto abordagens para superar a lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual. Algumas das abordagens mais promissoras incluem:

2.4.1. Ensino com Compreensão

Hiebert et al. (1997) propuseram uma abordagem de "ensino com compreensão" que enfatiza a construção de relações entre ideias matemáticas, a reflexão sobre procedimentos, e o desenvolvimento de uma comunidade de aprendizagem que valoriza o raciocínio e a comunicação matemática. Esta abordagem busca explicitamente integrar o desenvolvimento de habilidades procedimentais com a construção de compreensão conceitual.

2.4.2. Resolução de Problemas Como Contexto para Aprendizagem

Schoenfeld (1992) e outros proponentes da aprendizagem baseada em problemas argumentam que o envolvimento dos estudantes em problemas matemáticos autênticos e desafiadores pode servir como um contexto rico para o desenvolvimento integrado de conhecimento procedimental e conceitual. Nesta abordagem, os procedimentos emergem como ferramentas para abordar problemas significativos, em vez de serem apresentados como fins em si mesmos.

2.4.3. Múltiplas Representações

A utilização sistemática de múltiplas representações (verbal, numérica, algébrica, gráfica, etc.) de conceitos matemáticos tem sido proposta como uma estratégia para promover conexões

conceituais e compreensão profunda (Lesh, Post, & Behr, 1987; Duval, 2006). Esta abordagem reconhece que diferentes representações iluminam diferentes aspectos de um conceito matemático, e que a capacidade de transitar entre representações é um indicador de compreensão conceitual robusta.

2.4.4. Aprendizagem Produtiva Usando os Erros

Borasi (1996) e outros pesquisadores têm explorado o potencial dos erros como trampolins para a aprendizagem, particularmente para o desenvolvimento de compreensão conceitual. Esta abordagem envolve a análise reflexiva de erros matemáticos, explorando suas origens, implicações e as concepções errôneas que podem revelar. Ao investigar por que determinados procedimentos falham em certas situações, os estudantes podem desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos subjacentes.

2.4.5. Instrução Explícita de Conexões

Algumas abordagens enfatizam a importância da instrução explícita sobre as conexões entre procedimentos e conceitos (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Estas abordagens reconhecem que, embora a exploração e descoberta sejam valiosas, muitos estudantes beneficiam-se de orientação direta que explicita as relações entre diferentes aspectos do conhecimento matemático.

Embora estas abordagens ofereçam contribuições valiosas, cada uma apresenta limitações específicas em termos de implementação prática, abrangência ou fundamentação teórica. A Exploração Intuitiva de Problemas (EIP) que apresentamos neste artigo busca integrar elementos destas abordagens existentes em um estrutura coerente e teoricamente fundamentado, especificamente projetado

para abordar a lacuna entre procedimento e conceito de maneira sistemática e abrangente.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA EIP

A Exploração Intuitiva de Problemas (EIP) está ancorada em três pilares teóricos complementares que fornecem sua base epistemológica e pedagógica: o Construtivismo Piagetiano, a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e a Heurística de Polya.

3.1. Construtivismo Piagetiano

3.1.1. Princípios Fundamentais

O primeiro pilar teórico da EIP é o construtivismo desenvolvido por Jean Piaget (1896-1980), uma teoria epistemológica que postula que o conhecimento não é transmitido passivamente do ambiente para o sujeito, mas ativamente construído pelo aprendiz através da interação com o meio (Piaget, 1977). Segundo esta perspectiva, a aprendizagem não ocorre pela simples recepção de informações, mas através de um processo contínuo de construção e reconstrução de esquemas mentais.

Piaget propôs que esta construção do conhecimento ocorre através de dois processos complementares: a assimilação, na qual novas experiências são incorporadas a esquemas existentes, e a acomodação, na qual os esquemas existentes são modificados para acomodar novas experiências que não se encaixam adequadamente nas estruturas cognitivas prévias. Estes processos operam em conjunto no que Piaget denominou equilíbrio, um mecanismo autorregulador que busca estabelecer um equilíbrio entre os esquemas do sujeito e as experiências do ambiente.

Um conceito particularmente relevante para a EIP é o de desequilíbrio cognitivo ou conflito cognitivo, que ocorre quando o aprendiz encontra informações ou situações que não podem ser prontamente assimiladas aos esquemas existentes. Este desequilíbrio, quando produtivo, motiva o aprendiz a buscar novas formas de compreensão, catalisando o desenvolvimento cognitivo através da acomodação e reorganização de esquemas.

3.1.2. Aplicação na EIP

A EIP operacionaliza os princípios construtivistas de várias maneiras fundamentais:

Ação Cognitiva sobre Objetos Matemáticos: A EIP exige que os estudantes ajam cognitivamente sobre os problemas matemáticos, desenvolvendo suas próprias conjecturas, estratégias de resolução e generalizações. Esta ênfase na ação cognitiva alinha-se com a insistência piagetiana de que o conhecimento é construído através da interação ativa com o ambiente, não pela recepção passiva de informações.

Desequilíbrios Cognitivos Produtivos: O ciclo iterativo de problemas na EIP cria deliberadamente perturbações cognitivas que desafiam os esquemas existentes dos estudantes. Cada variação do problema inicial serve como um desequilíbrio produtivo que impulsiona o desenvolvimento conceitual, exigindo que os estudantes adaptem e expandam seus esquemas matemáticos.

Construção Social do Conhecimento: Embora Piaget seja frequentemente associado a uma visão individualista da construção do conhecimento, a EIP incorpora elementos do construtivismo social (Vygotsky, 1978) ao enfatizar a importância da interação,

discussão e negociação de significados entre estudantes. Esta dimensão social facilita o confronto de diferentes perspectivas e a construção conjunta de compreensões matemáticas mais robustas.

Respeito aos Processos Cognitivos Naturais: A EIP respeita os processos cognitivos naturais dos estudantes, permitindo que eles desenvolvam inicialmente abordagens intuitivas e informais antes de progredir para formulações mais formais e abstratas. Esta progressão alinha-se com a visão piagetiana do desenvolvimento cognitivo como um processo de abstração progressiva a partir de experiências concretas.

3.2. Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel

3.2.1. Princípios Fundamentais

O segundo fundamento da EIP é a Teoria da Aprendizagem Significativa desenvolvida por David Ausubel (1918-2008), que enfatiza a importância de conectar novos conhecimentos às estruturas cognitivas preexistentes do aprendiz (Ausubel, 1968; Ausubel, Novak, & Hanesian, 1978). Ausubel distingue entre aprendizagem significativa, na qual novos conhecimentos são integrados de maneira substantiva e não-arbitrária à estrutura cognitiva existente, e aprendizagem mecânica, na qual informações são memorizadas sem conexão significativa com conhecimentos prévios.

Um conceito central na teoria de Ausubel é o de subsunção (ou conceito âncora), que se refere a um conhecimento específico, já existente na estrutura cognitiva do aprendiz, que permite dar significado a um novo conhecimento. Quanto mais rico, claro e

estável for o subsunçor, mais eficaz será o processo de ancoragem do novo conhecimento.

Ausubel propõe dois processos principais através dos quais a aprendizagem significativa ocorre: a diferenciação progressiva, na qual conceitos mais gerais e inclusivos são progressivamente diferenciados em termos de detalhes e especificidade, e a reconciliação integrativa, na qual são estabelecidas novas relações entre conceitos, reconhecendo similaridades, diferenças e reconciliando inconsistências reais ou aparentes.

3.2.2. Aplicação na EIP

A Teoria da Aprendizagem Significativa sustenta a EIP de várias maneiras cruciais:

Problema Inicial como Subsunçor: Na EIP, o problema inicial funciona como um subsunçor cognitivo – um ponto de ancoragem para o desenvolvimento de conceitos mais complexos. Este problema é cuidadosamente selecionado para ser acessível aos conhecimentos prévios dos estudantes, mas também para conter estruturas matemáticas que possam ser expandidas e generalizadas.

Diferenciação Progressiva através de Variações: A progressão sistemática de problemas na EIP facilita a diferenciação progressiva, permitindo que os estudantes refinem gradualmente sua compreensão de conceitos matemáticos à medida que os aplicam em contextos variados. Cada variação do problema inicial ilumina diferentes aspectos do conceito em desenvolvimento, promovendo uma compreensão cada vez mais nítida e sofisticada.

Reconciliação Integrativa através de Generalização: A fase de generalização na EIP promove a reconciliação integrativa, incentivando os estudantes a estabelecer conexões entre diferentes aspectos do conhecimento matemático e a integrar observações específicas em estruturas conceituais mais abrangentes. Este processo ajuda a superar a compartimentalização do conhecimento matemático, promovendo uma visão mais coerente e unificada.

Organizadores Prévios: A EIP utiliza o conceito ausubeliano de organizadores prévios – materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem principal, com o objetivo de servir como ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que precisa saber. No contexto da EIP, o problema inicial e suas primeiras variações servem como organizadores prévios para conceitos matemáticos mais abstratos e complexos.

3.3. Heurística de Polya

3.3.1. Princípios Fundamentais

O terceiro pilar teórico da EIP é a heurística de resolução de problemas desenvolvida por George Polya (1887-1985), particularmente como articulada em sua obra seminal "How to Solve It" (Polya, 1945). Polya propôs uma estrutura sistemática para a resolução de problemas matemáticos, consistindo em quatro fases principais:

1. **Compreender o problema:** Identificar a incógnita, os dados, as condições, e verificar se o problema é determinado, subdeterminado ou sobredeterminado.

2. **Elaborar um plano:** Encontrar conexões entre os dados e a incógnita, considerar problemas auxiliares ou similares, e identificar teoremas ou métodos relevantes.
3. **Executar o plano:** Implementar a estratégia escolhida, verificando cada passo e sua correção.
4. **Examinar a solução (Retrospecto):** Verificar o resultado, considerar se há outros métodos de resolução, refletir sobre o que foi aprendido, e explorar possíveis generalizações ou aplicações.

Além desta estrutura geral, Polya enfatizou a importância de heurísticas específicas – estratégias gerais para abordar problemas quando não existe um algoritmo claro para sua resolução. Estas incluem trabalhar de trás para frente, considerar casos especiais, buscar padrões, fazer analogias, e introduzir elementos auxiliares.

3.3.2. Aplicação na EIP

A EIP incorpora quatro dimensões essenciais da abordagem de Polya:

Ênfase no Retrospecto: A EIP valoriza significativamente a quarta fase do modelo de Polya – o retrospecto ou reflexão sobre a solução. Após resolver cada variação do problema, os estudantes são encorajados a refletir sistematicamente sobre sua solução, explorando suas implicações, identificando padrões emergentes, e considerando possíveis generalizações. Este processo de reflexão deliberada transforma a experiência de resolução de problemas de um exercício pontual em uma oportunidade para o desenvolvimento conceitual.

Varição Sistemática de Problemas: Polya frequentemente advogava pela variação deliberada de problemas como uma estratégia para revelar estruturas matemáticas subjacentes e desenvolver intuição matemática. A EIP operacionaliza esta recomendação através da modificação sistemática de aspectos do problema original, criando uma sequência de problemas relacionados que iluminam progressivamente um conceito ou estrutura matemática.

Desenvolvimento de Heurísticas: A EIP promove o desenvolvimento de heurísticas gerais para resolução de problemas, não apenas a aplicação de algoritmos específicos. Ao enfrentar variações sistemáticas de problemas, os estudantes são naturalmente levados a desenvolver e refinar estratégias gerais de abordagem, como a identificação de invariantes, a consideração de casos especiais, e a busca por analogias com problemas previamente resolvidos.

Questionamento Socrático: A EIP incorpora o estilo de questionamento socrático que Polya exemplificou em seu trabalho. O professor, ao implementar a EIP, não fornece respostas diretas, mas guia os estudantes através de perguntas estratégicas que estimulam o pensamento autônomo e a descoberta de conexões e padrões.

3.4. Síntese Teórica: a Fundamentação Integrada da EIP

A força da EIP como metodologia pedagógica deriva da integração sinérgica destes três pilares teóricos. O Construtivismo Piagetiano fornece a base epistemológica, enfatizando a natureza construída do conhecimento matemático e a importância de desequilíbrios

cognitivos produtivos. A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel contribui com princípios para a estruturação da progressão de aprendizagem, particularmente a importância de ancorar novos conhecimentos em subsunçores existentes e promover a diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. A Heurística de Polya oferece orientações práticas para a resolução de problemas e o desenvolvimento de compreensão matemática através da reflexão e variação sistemática.

Esta fundamentação teórica integrada embasa todos os aspectos da EIP, desde a seleção e sequenciamento de problemas até as interações pedagógicas e práticas avaliativas. Ela proporciona não apenas uma base racional para a metodologia, mas também um conjunto de princípios orientadores que direcionam sua adaptação a diferentes contextos educacionais e domínios matemáticos.

4. METODOLOGIA DA EIP

A Exploração Intuitiva de Problemas (EIP) estrutura-se como um ciclo iterativo composto por quatro fases interconectadas, cada uma com objetivos pedagógicos específicos e práticas características.

4.1. Visão Geral do Ciclo EIP

O ciclo da EIP compreende quatro fases principais. Esse ciclo não é estritamente linear, mas iterativo e recursivo, com frequentes movimentos de ida e volta entre as fases à medida que a compreensão dos estudantes evolui. Adicionalmente, o ciclo completo pode ser repetido múltiplas vezes, com cada iteração construindo mais sobre os insights e estruturas conceituais desenvolvidas nas iterações anteriores.

4.1. Fase 1: Problema Inicial Acessível

4.1.1. Características do Problema Inicial

O problema inicial na EIP deve possuir duas características fundamentais:

Acessibilidade Cognitiva: O problema deve ser resolvível com os conhecimentos e habilidades que os estudantes já possuem, sem a necessidade de introdução prévia de novos conceitos ou técnicas. Esta acessibilidade é crucial para estabelecer o problema como um subsunçor efetivo (no sentido ausubeliano) e para permitir que os estudantes iniciem o ciclo com confiança e autonomia.

Potencial Generativo: Simultaneamente, o problema deve conter estruturas matemáticas ricas que possam ser exploradas e generalizadas através de variações sistemáticas. Ele deve funcionar como uma "semente" matemática capaz de gerar uma família de problemas relacionados que, coletivamente, iluminam um conceito ou estrutura matemática significativa.

Adicionalmente, o problema inicial, idealmente, deve ter:

- **Múltiplas Estratégias de Resolução:** Permite diferentes abordagens e métodos de solução, facilitando a discussão e comparação de estratégias.
- **Representabilidade Múltipla:** Pode ser abordado através de diferentes representações (numérica, algébrica, gráfica, etc.), promovendo conexões entre representações.

- **Conexões Conceituais:** Relaciona-se naturalmente a múltiplos conceitos matemáticos, potencializando a integração de conhecimentos.
- **Engajamento Intrínseco:** Apresenta um desafio intrinsecamente interessante ou relevante, motivando o envolvimento dos estudantes.

4.2.2. Seleção e Apresentação do Problema Inicial

A seleção do problema inicial é uma decisão pedagógica crucial que requer consideração cuidadosa dos objetivos de aprendizagem, conhecimentos prévios dos estudantes, e potenciais trajetórias de desenvolvimento conceitual. Algumas fontes potenciais para problemas iniciais incluem:

- Problemas clássicos da história da matemática
- Situações contextualizadas relevantes para os estudantes
- *Puzzles* ou desafios matemáticos
- Problemas que ilustram aplicações práticas de conceitos matemáticos
- Variações de problemas previamente explorados em outros contextos

A apresentação do problema inicial deve ser clara e acessível, evitando terminologia técnica desnecessária ou notações formais que possam criar barreiras à entrada. O problema pode ser apresentado verbalmente, por escrito, ou através de representações

visuais, dependendo de sua natureza e do contexto educacional específico.

É importante que o problema seja apresentado sem sugestões explícitas de métodos ou estratégias de resolução, permitindo que os estudantes mobilizem seus próprios recursos cognitivos e desenvolvam abordagens autênticas.

4.3. Fase 2: Exploração Intuitiva

4.3.1. Características da Exploração Intuitiva

Na fase de exploração intuitiva, os estudantes abordam o problema inicial utilizando seus conhecimentos prévios, intuições matemáticas e estratégias informais. Esta fase é caracterizada por:

Autonomia Cognitiva: Os estudantes são encorajados a desenvolver suas próprias abordagens e estratégias, sem a imposição de métodos específicos ou algoritmos padronizados. Esta autonomia promove o engajamento ativo e a apropriação do problema.

Múltiplas Abordagens: Diferentes estudantes tipicamente desenvolvem estratégias diversas, refletindo seus conhecimentos prévios, preferências cognitivas e intuições matemáticas particulares. Esta diversidade de abordagens enriquece o ambiente de aprendizagem e fornece material para discussões comparativas subsequentes.

Representações Diversas: Os estudantes são encorajados a utilizar representações variadas (desenhos, tabelas, diagramas, notações informais, etc.) para apoiar seu raciocínio e comunicar suas ideias. Esta diversidade de representações facilita o acesso ao problema por

estudantes com diferentes estilos de aprendizagem e prepara o terreno para conexões entre representações.

Raciocínio Heurístico: A resolução do problema inicial frequentemente envolve raciocínio heurístico e experimental, incluindo tentativa e erro sistemático, consideração de casos especiais, busca de padrões, e uso de analogias. Estas heurísticas constituem ferramentas cognitivas valiosas que serão refinadas e expandidas ao longo do ciclo da EIP.

4.3.2. Papel do Professor Durante a Exploração Intuitiva

Durante a fase de exploração intuitiva, o papel do professor é primariamente de facilitação e suporte, não de instrução direta. Especificamente, o professor:

- **Clarifica o Problema:** Esclarece aspectos do problema que possam ser ambíguos ou confusos, sem sugerir métodos de solução.
- **Fornece Andaimos Cognitivos:** Oferece suporte calibrado aos estudantes que encontram dificuldades, através de perguntas orientadoras ou sugestões indiretas, sem resolver o problema por eles.
- **Monitora Estratégias:** Observa atentamente as diferentes estratégias que emergem, identificando insights produtivos que podem ser destacados durante discussões subsequentes.
- **Gerencia o Tempo:** Assegura que os estudantes tenham tempo suficiente para desenvolver suas abordagens, mas também mantém o momentum da aula.

- **Promove a Metacognição:** Encoraja os estudantes a refletir sobre suas estratégias e raciocínio, através de perguntas como "Como você pensou sobre isso?" ou "O que te levou a tentar essa abordagem?".

4.3.3. Interação Entre Estudantes

A interação entre estudantes desempenha um papel crucial durante a exploração intuitiva. Dependendo do contexto educacional e dos objetivos específicos, esta interação pode ser estruturada de diferentes formas:

- **Trabalho Individual seguido de Discussão Coletiva:** Os estudantes inicialmente trabalham individualmente no problema, seguido por uma discussão em que diferentes abordagens são compartilhadas e comparadas.
- **Colaboração em Pequenos Grupos:** Os estudantes trabalham colaborativamente em pequenos grupos, negociando abordagens e construindo soluções conjuntas.
- **Discussão em Toda a Classe:** Abordagens particulares são apresentadas e discutidas com toda a classe, facilitando a exposição a múltiplas perspectivas.

Independentemente da estrutura específica, a interação entre estudantes deve ser caracterizada pelo respeito mútuo, escuta ativa, e valorização da diversidade de abordagens e perspectivas.

4.4. Fase 3: Variação Sistemática

4.4.1. Princípios de Variação Sistemática

A fase de variação sistemática é o coração da metodologia EIP e sua característica mais distintiva. Nesta fase, o problema inicial é modificado através de variações deliberadas e progressivas, projetadas para revelar estruturas matemáticas subjacentes e facilitar o desenvolvimento conceitual.

A variação sistemática na EIP é guiada por vários princípios:

Progressão Gradual: As variações são sequenciadas de forma a aumentar gradualmente em complexidade e abstração, permitindo que os estudantes construam progressivamente sua compreensão.

Foco em Invariantes: As variações são projetadas para destacar invariantes matemáticos – propriedades, relações ou estruturas que permanecem constantes apesar de mudanças em aspectos superficiais. A percepção destes invariantes é crucial para o desenvolvimento de compreensão conceitual.

Contraste e Generalização: As variações frequentemente exploram contrastes deliberados (o que muda versus o que permanece constante) para facilitar a generalização e a abstração.

Conexão com Objetivos Conceituais: Cada variação tem um propósito pedagógico específico, conectado aos objetivos conceituais da unidade de aprendizagem.

4.4.2. Tipos de Variações

A EIP emprega diversos tipos de variações, cada um servindo a propósitos pedagógicos específicos:

Variações Paramétricas: Modificam valores numéricos ou parâmetros no problema, mantendo sua estrutura geral. Estas variações frequentemente revelam padrões numéricos ou algébricos e facilitam a percepção de relações funcionais.

Exemplo: Se o problema inicial envolve encontrar a área de um retângulo com lados de comprimento 3 e 5, variações paramétricas poderiam envolver retângulos com dimensões 4 e 6, 2 e 10, etc.

Variações Estruturais: Modificam a estrutura ou configuração do problema, mantendo seu contexto geral. Estas variações frequentemente revelam princípios matemáticos mais profundos e facilitam a transferência de aprendizagem.

Exemplo: Se o problema inicial envolve encontrar o número de diagonais de um pentágono, variações estruturais poderiam envolver encontrar o número de diagonais de um hexágono, heptágono, etc.

Variações Contextuais: Mantêm a estrutura matemática do problema, mas alteram o contexto ou situação em que é apresentado. Estas variações promovem a flexibilidade cognitiva e a percepção de isomorfismos matemáticos.

Exemplo: Se o problema inicial envolve calcular juros compostos em um contexto financeiro, uma variação contextual poderia envolver calcular o crescimento populacional em um contexto biológico.

Variações Representacionais: Apresentam o mesmo problema em diferentes sistemas de representação. Estas variações promovem a flexibilidade representacional e a compreensão da equivalência entre diferentes representações.

Exemplo: Se o problema inicial é apresentado algebricamente, variações representacionais poderiam apresentá-lo graficamente, numericamente, ou verbalmente.

Variações de Condições Limites: Exploram casos extremos ou condições limites do problema. Estas variações frequentemente revelam comportamentos assintóticos ou propriedades fundamentais.

Exemplo: Se o problema inicial envolve otimizar a área de um retângulo com perímetro fixo, uma variação de condição limite poderia considerar o que acontece quando um dos lados se aproxima de zero.

4.4.3. Sequenciamento de Variações

O sequenciamento eficaz das variações é crucial para o sucesso da EIP. Este sequenciamento deve considerar:

- A progressão cognitiva dos estudantes, começando com variações que são naturalmente acessíveis a partir do problema inicial.
- O desenvolvimento lógico dos conceitos matemáticos, construindo sistematicamente em direção a generalizações e abstrações.
- A emergência de padrões e estruturas, com variações subsequentes construindo sobre os padrões observados em variações anteriores.

- As necessidades e respostas específicas dos estudantes, com flexibilidade para ajustar a sequência baseada nas observações durante a implementação.

O sequenciamento não precisa ser completamente pré-determinado; o professor pode desenvolver um repertório de variações potenciais e selecionar ou adaptar variações específicas para as respostas e necessidades dos estudantes.

4.5. Fase 4: Generalização e Formalização

4.5.1. Características da Generalização e Formalização

A fase final do ciclo EIP envolve a identificação de padrões emergentes a partir das variações exploradas e sua formalização em termos matemáticos. Esta fase é caracterizada por:

Articulação de Conjecturas: Os estudantes são encorajados a articular conjecturas baseadas nos padrões observados através das múltiplas variações do problema. Estas conjecturas representam hipóteses sobre relações ou propriedades gerais que transcendem casos específicos.

Verificação Sistemática: As conjecturas são verificadas através de casos adicionais ou contra-exemplos potenciais, desenvolvendo a apreciação dos estudantes pela necessidade de verificação rigorosa em matemática.

Justificativa e Prova: Dependendo do nível educacional e do contexto, os estudantes desenvolvem justificativas para suas conjecturas, que podem variar desde argumentos informais

baseados em exemplos até provas formais utilizando raciocínio dedutivo.

Representação Formal: As relações e estruturas descobertas são expressas utilizando linguagem matemática apropriada, incluindo notação algébrica, representações gráficas, ou outros sistemas formais relevantes para o domínio.

Conexão com Conhecimentos Estabelecidos: As generalizações desenvolvidas são conectadas a conceitos, teoremas ou estruturas matemáticas estabelecidas, situando a exploração no contexto mais amplo do conhecimento matemático.

4.5.2. Papel do Professor na Generalização e Formalização

Durante a fase de generalização e formalização, o papel do professor evolui para incluir elementos mais diretos de orientação e estruturação, embora ainda mantendo um forte componente de facilitação. Especificamente, o professor:

Facilita a Percepção de Padrões: Ajuda os estudantes a perceber padrões e regularidades que emergem através das múltiplas variações, possivelmente através de perguntas dirigidas ou da organização sistemática de observações.

Introduz Linguagem e Notação: Apresenta terminologia matemática apropriada e sistemas de notação que podem ajudar a capturar e comunicar as generalizações desenvolvidas.

Modela o Raciocínio Matemático: Demonstra formas de raciocínio matemático, incluindo a formulação precisa de conjecturas, a busca de contra-exemplos, e o desenvolvimento de justificativas.

Conecta com o Conhecimento Formal: Estabelece conexões explícitas entre as descobertas dos estudantes e o conhecimento matemático formal, reconhecendo e validando suas construções conceituais.

Promove a Reflexão Metacognitiva: Encoraja os estudantes a refletir sobre sua jornada de aprendizagem, desde o problema inicial até as generalizações desenvolvidas, promovendo a consciência de seu próprio desenvolvimento conceitual.

4.5.3. Documentação e Comunicação

Um aspecto importante da fase de generalização e formalização é a documentação e comunicação das descobertas e compreensões desenvolvidas. Isto pode assumir várias formas:

Registros Escritos Individuais: Os estudantes documentam suas conjecturas, justificativas e conclusões em registros escritos individuais, como cadernos ou portfólios.

Artefatos Coletivos: A classe desenvolve artefatos coletivos, materiais concretos, cartazes, apresentações digitais, que capturam as principais descobertas e generalizações.

Apresentações Oraís: Os estudantes apresentam suas descobertas e raciocínio oralmente, desenvolvendo habilidades de comunicação matemática.

Discussões Reflexivas: A classe engaja-se em discussões reflexivas sobre as generalizações desenvolvidas, suas implicações, e conexões com outros conhecimentos matemáticos.

Esta documentação e comunicação não apenas consolidam a aprendizagem, mas também desenvolvem habilidades metacognitivas e de comunicação matemática essenciais para o desenvolvimento matemático de longo prazo.

4.6. Implementação Prática e Considerações

4.6.1. Planejamento e Preparação

A implementação eficaz da EIP requer planejamento cuidadoso e preparação detalhada. Alguns aspectos chave a considerar incluem:

Análise Conceitual: Identificação clara dos conceitos matemáticos-alvo e suas inter-relações, para informar a seleção e sequenciamento de problemas e variações.

Antecipação de Estratégias: Previsão das possíveis estratégias e abordagens que os estudantes podem desenvolver, para preparar respostas pedagógicas apropriadas.

Preparação de Materiais: Desenvolvimento de materiais de apoio, como folhas de trabalho, manipulativos, ou recursos digitais, que possam apoiar a exploração dos estudantes.

Planejamento Temporal: Alocação realista de tempo para cada fase do ciclo EIP, reconhecendo que a exploração profunda frequentemente requer mais tempo do que abordagens mais diretas.

4.6.2. Adaptação a Diferentes Contextos

A EIP é uma metodologia flexível que pode ser adaptada a diversos contextos educacionais, níveis de ensino, e domínios matemáticos. Algumas considerações para adaptação incluem:

Nível Educacional: Ajuste do grau de formalização, complexidade das variações, e nível de autonomia esperado dos estudantes de acordo com seu nível educacional e desenvolvimento cognitivo.

Domínio Matemático: Adaptação da natureza dos problemas e variações para refletir as características específicas de diferentes domínios matemáticos (aritmética, álgebra, geometria, análise, etc.).

Restrições Temporais: Modificação da extensão e profundidade da exploração para acomodar diferentes estruturas temporais, desde intervenções pontuais até unidades estendidas.

Recursos Disponíveis: Ajuste da implementação para maximizar o uso eficaz dos recursos disponíveis, sejam eles materiais, tecnológicos, ou humanos.

4.6.3. Avaliação no Contexto da EIP

A avaliação no contexto da EIP deve alinhar-se com seus objetivos e princípios pedagógicos, focando não apenas em resultados finais, mas também em processos de pensamento, desenvolvimento conceitual, e habilidades metacognitivas. Algumas abordagens avaliativas apropriadas incluem:

Observação Sistemática: Observação e documentação das estratégias, raciocínio e interações dos estudantes durante o ciclo EIP.

Análise de Produções: Exame detalhado dos registros escritos, artefatos, e apresentações produzidos pelos estudantes, com foco tanto no conteúdo quanto no processo.

Entrevistas e Conferências: Conversas individuais ou em pequenos grupos com os estudantes para explorar seu pensamento, compreensão, e percepções.

Autoavaliação e Reflexão: Oportunidades estruturadas para que os estudantes reflitam sobre sua própria aprendizagem, identificando *insights*, desafios e áreas para desenvolvimento futuro.

Tarefas de Transferência: Problemas ou situações novas, mas relacionadas, que exigem a transferência e aplicação das compreensões desenvolvidas através do ciclo EIP.

Estas abordagens avaliativas não apenas fornecem informações sobre a aprendizagem dos estudantes, mas também contribuem para o próprio processo de aprendizagem, promovendo reflexão, metacognição, e desenvolvimento conceitual contínuo.

5. EXEMPLO DE IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO EIP

Para ilustrar a aplicação prática da Exploração Intuitiva de Problemas (EIP) e analisar sua eficácia em promover a integração entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual, apresento uma forma de tratar o tema Progressões Aritméticas.

5.1. Contexto e Objetivos

Suponhamos uma turma de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental (idades entre 14-15 anos) ou do primeiro ano do Ensino

Médio. Suponhamos que esses estudantes possuam conhecimentos básicos de aritmética e álgebra elementar, mas não tenham sido formalmente introduzidos ao conceito de progressão aritmética.

Suponhamos também que os objetivos conceituais desta unidade de aprendizagem são:

- Desenvolver a compreensão intuitiva das características e propriedades de sequências aritméticas.
- Deduzir a fórmula para a soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Compreender a relação entre representações numéricas, algébricas e geométricas de progressões aritméticas.
- Aplicar o conceito de progressão aritmética em contextos diversos.

5.2. Implementação do Ciclo EIP

Fase 1: Fase 1: Problema Inicial Acessível

Suponhamos que o problema inicial apresentado aos estudantes seja o seguinte:

"Calcule a soma dos números inteiros de 1 a 10, ou seja, $1 + 2 + 3 + \dots + 10$."

Este problema foi selecionado por sua acessibilidade (todos os estudantes possuem os conhecimentos necessários para abordá-lo)

e seu potencial generativo (contém a estrutura fundamental da soma de termos em progressão aritmética).

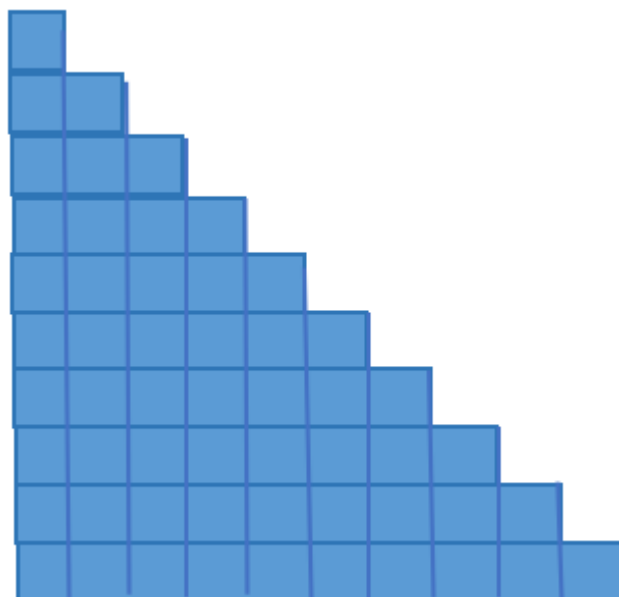
O problema é apresentado sem sugestões de métodos ou estratégias, e os estudantes são instruídos a resolvê-lo utilizando qualquer abordagem que considerem apropriada.

Fase 2: Exploração Intuitiva

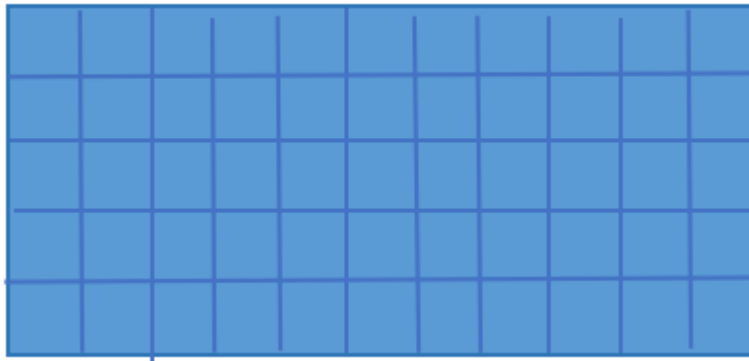
Durante a fase de exploração, aproximadamente 15 minutos ou mais, os estudantes abordam o problema utilizando diversas estratégias. As abordagens mais comuns incluem:

Adição Direta: Alguns estudantes simplesmente somam os números sequencialmente ($1+2=3$, $3+3=6$, $6+4=10$, etc.) obtendo $S=55$.

Abordagem Visual/Geométrica: Usando quadradinhos feitos de papelão ou outro material, o Professor propõe que os alunos tentem construir uma figura geométrica que represente a soma buscada. Surge uma configuração triangular do tipo abaixo:



O professor pede que os alunos movam quadradinhos e transformem essa figura num retângulo. Eles, então, obtém a figura:



Da qual concluem que a soma de 1 a 10 é a área do retângulo, isto é,

$$S=5 \cdot 11=55$$

Agrupamento por Pares: Vários estudantes percebem que poderiam agrupar os números em pares cuja soma é constante (1+10=11, 2+9=11, 3+8=11, etc.), chegando à solução $5 \times 11=55$. Caso isso não ocorra, o Professor usando o procedimento geométrico incentiva os estudantes nessa direção.

Após o período de exploração individual, alguns estudantes compartilham suas estratégias com a classe. O professor facilita uma discussão comparativa, destacando particularmente a estratégia de agrupamento por pares devido a seu potencial para generalização.

Fase 3: Variação Sistemática

O professor então faz uma série de variações sistemáticas do problema inicial:

Variação 1: "Calcule a soma dos números inteiros de 1 a 20, de 1 a 50 e de 1 a 100."

Esta variação paramétrica simples visa permitir que os estudantes estendam as estratégias existentes, particularmente o agrupamento por pares.

Variação 2: "Calcule a soma dos números inteiros de 1 a n , onde n é um número inteiro qualquer."

Esta variação introduz um parâmetro variável, incentivando os estudantes a pensar algebricamente e buscar uma expressão geral.

Variação 3: "Calcule a soma dos números pares de 2 a 20."

Esta variação estrutural introduz uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1=2$ e razão $r=2$.

Variação 4: "Calcule a soma dos números ímpares de 1 a 19."

Esta variação complementar introduz uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1=1$ e razão $r=2$.

Variação 5: "Calcule a soma dos termos da sequência 5, 8, 11, 14, ..., 29."

Esta variação introduz uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1=5$ e razão $r=3$, incentivando os estudantes a generalizar além de sequências começando em 1.

Variação 6: "Uma progressão aritmética tem primeiro termo $a_1=7$ e razão $r=4$. Calcule a soma dos 12 primeiros termos."

Esta variação introduz a terminologia formal de progressão aritmética e apresentou um caso onde os termos não são

explicitamente listados.

Fase 4: Generalização e Formalização

Cada variação deve ser explorada pelos estudantes, seguida por discussão coletiva. O professor guia os estudantes a organizar sistematicamente suas observações, particularmente a relação entre o número de termos, o primeiro e último termos, a razão e a soma.

Através da exploração das variações, os estudantes gradualmente percebem padrões e regularidades. Com orientação do professor, eles formulam conjecturas sobre a relação entre o número de termos (n), o primeiro termo (a_1), o último termo (a_n), e a soma (S_n). Após isso, eles podem conjecturar o que ocorre se considerarmos alterações no valor da razão r .

A maioria dos estudantes deve chegar à conclusão de que a soma pode ser calculada multiplicando o número de termos pela média do primeiro e último termos:

$$S_n = n \times (a_1 + a_n)/2.$$

O professor então facilita uma discussão sobre como esta fórmula pode ser justificada. Vários estudantes oferecem justificativas baseadas na estratégia de agrupamento por pares, que foi formalizada indo de uma representação geométrica para uma representação algébrica.

Se escrevermos a soma em ordem crescente e depois em ordem decrescente:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

E somarmos as duas expressões, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1) = n \times (a_1 + a_n)$$

Portanto, $S_n = n \times (a_1 + a_n)/2$

O professor também pode introduzir uma interpretação geométrica da fórmula, representando a soma como a área de uma figura similar a um trapézio retângulo, conectando assim representações algébricas e geométricas do conceito.

Finalmente, os estudantes são incentivados pelo professor a explorar como a fórmula poderia ser expressa em termos do primeiro termo (a_1), número de termos (n), e razão (r), derivando a fórmula alternativa:

$$S_n = n \times [2a_1 + (n-1)r]/2.$$

5.1.3. Resultados e Análise

A implementação da EIP neste contexto é capaz de produzir vários resultados notáveis:

Desenvolvimento Conceitual: Os estudantes desenvolverem uma compreensão profunda e multifacetada das progressões aritméticas, incluindo suas propriedades, representações, e aplicações. Esta compreensão transcende a simples memorização de fórmulas, envolvendo a percepção de relações estruturais e conexões entre diferentes representações.

Transição de Compreensão Aditiva para Relacional: Haver uma clara transição da compreensão inicial aditiva (calcular somas específicas termo a termo) para uma compreensão relacional (reconhecer padrões estruturais e relações algébricas). Esta transição será evidenciada nas explicações cada vez mais sofisticadas dos estudantes e em sua capacidade de justificar e aplicar as fórmulas derivadas.

Apropriação do Conhecimento: É esperado que os estudantes demonstrem forte apropriação do conhecimento desenvolvido, frequentemente referindo-se à fórmula como "nossa fórmula" e demonstrando confiança em sua aplicação e justificação. Esta apropriação contrasta com a relação frequentemente alienada que estudantes desenvolvem com fórmulas simplesmente apresentadas a eles.

Transferência e Aplicação: É esperado que em avaliações subsequentes, os estudantes demonstrem capacidade de transferir seu conhecimento para novos contextos, incluindo problemas envolvendo progressões aritméticas em situações aplicadas e conexões com outros tópicos matemáticos como funções lineares.

Atitudes e Disposições: É esperado observar mudanças positivas nas atitudes e disposições dos estudantes em relação à matemática, incluindo maior confiança, curiosidade, e valorização do raciocínio e justificação matemática.

5.1.4. Desafios e Adaptações

A implementação da EIP neste contexto também apresenta desafios que demandam adaptações:

Gestão do Tempo: O processo de exploração e generalização requer tempo , necessitando ajustes no planejamento do conteúdo. Esta é uma consideração importante para educadores que implementam a EIP em contextos com restrições temporais significativas.

Níveis de Abstração: Alguns estudantes terão dificuldade em transitar para níveis mais abstratos de generalização, particularmente na derivação da fórmula em termos de a_1 , n , e r . Isto exige suporte adicional e andaimes cognitivos adaptados às necessidades específicas deles.

Documentação do Pensamento: Inicialmente, muitos estudantes podem mostrar dificuldade em documentar seu raciocínio e processos de pensamento.

6. CONCLUSÃO

6.1. Síntese das Contribuições

Este artigo apresentou a Exploração Intuitiva de Problemas (EIP) como uma metodologia pedagógica inovadora especificamente concebida para abordar a persistente lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual na educação matemática. Através de uma fundamentação teórica robusta, descrição metodológica detalhada, e exemplo de uso, mostrei como a EIP pode facilitar a transição de uma compreensão aditiva e procedimental para uma compreensão estrutural e relacional, promovendo uma compreensão matemática genuína.

As principais contribuições deste trabalho incluem:

1. Uma articulação clara da natureza e manifestações da lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual, baseada em literatura relevante e observações empíricas.
2. Uma fundamentação teórica integrada da EIP, articulando suas bases no Construtivismo Piagetiano, na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, e na Heurística de Polya.
3. Uma descrição detalhada e operacional da metodologia da EIP, explicitando seu ciclo iterativo de problema inicial acessível, exploração intuitiva, variação sistemática, e generalização e formalização.
4. Documentação e análise de dois estudos de caso que ilustram a aplicação da EIP em contextos matemáticos distintos, demonstrando sua versatilidade e eficácia.
5. Uma discussão aprofundada das implicações pedagógicas da EIP, particularmente no que diz respeito à redefinição do papel docente e às necessidades de formação e desenvolvimento profissional.
6. Uma análise dos desafios e potencialidades da implementação ampla da EIP, considerando fatores institucionais, culturais, e sistêmicos.

6.2. Limitações e Direções para Pesquisas Futuras

Embora este trabalho apresente contribuições significativas, reconheço várias limitações que apontam direções para pesquisas

futuras: limitações metodológicas, diversidade de contextos e domínios, implementação em larga escala, integração tecnológica, avaliação adequada, impacto de médio e longo prazo, estudos longitudinais para quantificar a melhoria na retenção de médio e longo prazo e na capacidade de transferência de conhecimento, desenvolvimento de programas de formação docente focados na arquitetura de problemas e na mediação construtivista.

6.3. Reflexões Finais

A persistente lacuna entre conhecimento procedimental e compreensão conceitual na educação matemática não é meramente um desafio técnico-pedagógico, mas um sintoma de questões mais profundas relacionadas à natureza do conhecimento matemático, aos objetivos da educação matemática, e às estruturas institucionais e culturais que moldam as práticas educacionais.

A Exploração Intuitiva de Problemas (EIP) representa uma resposta a este desafio que é simultaneamente pragmática e transformativa. É pragmática em sua operacionalização clara e aplicabilidade a contextos educacionais reais. É transformativa em sua reconceitualização fundamental da relação entre estudante, professor e conhecimento matemático.

Em sua essência, a EIP busca reconectar a educação matemática com a prática matemática autêntica, reconhecendo que a matemática não é primariamente um corpo de conhecimento a ser transmitido, mas uma forma de atividade humana – uma maneira de explorar, conjecturar, generalizar, e dar sentido ao mundo. Ao engajar os estudantes nesta atividade autêntica, a EIP não apenas promove a integração entre procedimento e conceito, mas cultiva

disposições matemáticas duradouras – curiosidade, perseverança, precisão, e apreciação da beleza e poder do pensamento matemático.

Em um momento histórico caracterizado por rápidas transformações tecnológicas, econômicas e sociais, estas disposições e a compreensão matemática profunda que as acompanha são mais valiosas do que nunca. A EIP oferece um caminho promissor para cultivá-las, contribuindo para o desenvolvimento de indivíduos matematicamente preparados, capazes de aplicar o pensamento matemático com flexibilidade, criatividade, e discernimento em contextos diversos e imprevisíveis.

O desafio que permanece é como apoiar educadores, instituições, e sistemas educacionais na adoção e adaptação da EIP, superando barreiras culturais, institucionais, e práticas para realizar seu potencial transformativo. Este desafio convida à colaboração entre pesquisadores, formadores de professores, administradores educacionais, e professores de sala de aula, unidos pelo compromisso comum com uma educação matemática que é simultaneamente rigorosa, significativa, e emancipadora.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P. (1968). **Educational psychology: A cognitive view.** Holt, Rinehart and Winston.

BALL, D. L., & BASS, H. (2003). **Making mathematics reasonable in school.** In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.

BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. (2008). **Content knowledge for teaching: What makes it special?** *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

BAROODY, A. J., FEIL, Y., & JOHNSON, A. R. (2007). **An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge.** *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 115-131.

BOALER, J. (2015). **Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.** Jossey-Bass.

BOALER, J. (2016). **Designing mathematics classes to promote equity and engagement.** *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 172-178.

BORASI, R. (1996). **Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors.** Ablex Publishing Corporation.

DARLING-HAMMOND, L. (2010). **The flat world and education: How America's commitment to equity will determine our future.** Teachers College Press.

DEHAENE, S. (2011). **The number sense: How the mind creates mathematics.** Oxford University Press.

DUVAL, R. (2006). **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.** *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

HIEBERT, J., & LEFEVRE, P. (1986). **Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis.** In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.

HIEBERT, J., CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., FUSON, K., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., & WEARNE, D. (1997). **Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.** Heinemann.

LESH, R., POST, T., & BEHR, M. (1987). **Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving.** In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.

PHILIP, R. A. (2007). **Mathematics teachers' beliefs and affect.** In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Information Age Publishing.

PIAGET, J. (1977). **The development of thought: Equilibration of cognitive structures.** Viking Press.

POLYA, G. (1945). **How to solve it: A new aspect of mathematical method.** Princeton University Press.

RITTLE-JOHNSON, B., & ALIBALI, M. W. (1999). **Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?** *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189.

RITTLE-JOHNSON, B., & KOEDINGER, K. R. (2009). **Iterating between lessons on concepts and procedures can improve mathematics**

knowledge. British Journal of Educational Psychology, 79(3), 483-500.

RITTLE-JOHNSON, B., & SCHNEIDER, M. (2015). **Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics.** In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), Oxford handbook of numerical cognition (pp. 1118-1134). Oxford University Press.

RITTLE-JOHNSON, B., SIEGLER, R. S., & ALIBALI, M. W. (2001). **Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process.** Journal of Educational Psychology, 93(2), 346-362.

SCHOENFELD, A. H. (1988). **When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses.** Educational Psychologist, 23(2), 145-166.

SCHOENFELD, A. H. (1992). **Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.** In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370). Macmillan.

SCHOENFELD, A. H. (2016). **Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint).** Journal of Education, 196(2), 1-38.

SHEPARD, L. A. (2000). **The role of assessment in a learning culture.** Educational Researcher, 29(7), 4-14.

SIEGLER, R. S. (2003). **Implications of cognitive science research for mathematics education.** In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for

school mathematics (pp. 219-233). National Council of Teachers of Mathematics.

SILVER, E. A. (1986). **Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships.** In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-198). Lawrence Erlbaum Associates.

SKEMP, R. R. (1976). **Relational understanding and instrumental understanding.** *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

STAR, J. R. (2005). **Reconceptualizing procedural knowledge.** *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.

STIGLER, J. W., & HIEBERT, J. (1999). **The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.** Free Press.

TALL, D. (2013). **How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics.** Cambridge University Press.

VYGOTSKY, L. S. (1978). **Mind in society: The development of higher psychological processes.** Harvard University Press.

Departamento de Matemática e Estatística Universidade Estadual
de Ponta Grossa - Paraná

¹ Especialista em Metodologia de ensino de Matemática. E-mail:
[acesse o artigo original para visualizar o e-mail](#)

