REVISTA TÓPICOS

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS: PROPOSTAS PARA O TRABALHO DOCENTE

DOI: 10.5281/zenodo.14580247

Lucas Nunes de Moraes

RESUMO
Este artigo apresenta diferentes perspectivas para o estudo das funções trigonométricas hiperbólicas (FTH), com foco na elaboração de uma Sequência Didática voltada para o ensino de suas propriedades e da curva catenária em sala de aula. Inicialmente, realizamos uma análise de trabalhos do PROFMAT que abordaram as FTH ou a curva catenária, identificando pontos de destaque e lacunas a serem preenchidas. Observamos, por exemplo, que o uso do Gateway Arch como exemplo de aplicação da catenária é recorrente, embora saturado. Com isso, buscamos ir além, explorando propriedades menos conhecidas, como o fato de a catenária possuir a menor energia potencial gravitacional, ser o lugar geométrico do centro de uma parábola rolante e ter seu comprimento de arco igual à área sob a curva. Compilamos um conjunto de propriedades das FTH, acompanhadas de demonstrações matemáticas, para criar um material de referência confiável para professores. A Sequência Didática proposta foi estruturada em três níveis de profundidade, oferecendo flexibilidade para a aplicação das propriedades em diferentes contextos

educacionais. O objetivo é contribuir para o ensino significativo das FTH e incentivar sua inclusão nos currículos escolares e universitários.
Palavras-chave: Funções hiperbólicas; Curva catenária; Sequência didática; Ensino de matemática; Propriedades matemáticas; Formação de professores.

ABSTRACT

This article explores various perspectives on hyperbolic trigonometric functions (HTF), focusing on the development of a Didactic Sequence for teaching their properties and the catenary curve in the classroom. Initially, an analysis of PROFMAT works addressing HTF or the catenary was conducted to identify key highlights and gaps to address. For instance, while the Gateway Arch is a common example of the catenary's application, its frequent use has become oversaturated. Thus, we delve deeper, exploring lesser-known properties, such as the catenary's characteristic of having the least gravitational potential energy, being the geometric locus of the center of a rolling parabola, and its arc length equating to the area beneath the curve. A compendium of HTF properties, accompanied by mathematical proofs, was compiled to serve as a reliable reference for teachers. The proposed Didactic Sequence is structured into three levels of depth, allowing flexible application of these properties in various educational contexts. The aim is to support meaningful teaching of HTF and encourage their inclusion in school and university curricula.
Keywords: Hyperbolic functions; Catenary curve; Didactic sequence; Mathematics teaching; Mathematical properties; Teacher training.

1 Introdução

As Funções Trigonométricas Hiperbólicas (FTH), também conhecidas como Funções Hiperbólicas (FH), são originadas da parametrização da hipérbole e apresentam uma forte analogia com as Funções Trigonométricas Circulares, amplamente estudadas no ensino básico. Apesar de sua relevância teórica e prática, o ensino das FTH é raramente abordado nas instituições de ensino.

Historicamente, o desenvolvimento das FTH remonta ao problema de determinar a curva formada por uma corda suspensa, conhecida como catenária. Esse tema, erroneamente associado à parábola por Galileu Galilei, foi desmistificado por Christiaan Huygens no século XVII. Contudo, as semelhanças entre as duas curvas ainda geram confusão, reforçando a necessidade de revisões conceituais e materiais didáticos que abordem o tema de forma acessível.

As FTH possuem aplicações significativas em diversas áreas, como arquitetura, engenharia e física. A curva catenária, representada pelo gráfico do cosseno hiperbólico, é um exemplo notável, presente em cabos suspensos, pontes pênseis e estruturas submarinas. Além disso, as FTH aparecem em equações diferenciais específicas, na geometria hiperbólica e como extensões complexas das funções trigonométricas circulares.

Este artigo busca responder ao seguinte problema de pesquisa: como as Funções Trigonométricas Hiperbólicas podem ser abordadas no ensino básico e superior de forma significativa, utilizando materiais didáticos apropriados? Para tanto, os objetivos incluem revisar definições e propriedades das FTH, explorar suas aplicações e propor abordagens didáticas que auxiliem professores no ensino do tema.

A pesquisa apresentada é de natureza exploratória e descritiva, baseando-se em uma revisão de livros e materiais didáticos, bem como na análise de lacunas em trabalhos acadêmicos anteriores. Espera-se que este estudo contribua para ampliar o ensino das FTH, incentivando sua inclusão em currículos escolares e universitários.

2 Revisão de Literatura

O ensino de Matemática é uma área rica e diversificada, com um vasto leque de títulos e temas a serem explorados. Dentro desse universo, o presente trabalho foca no estudo das Funções Trigonométricas Hiperbólicas. Embora essas funções possuam aplicações significativas, elas são pouco conhecidas, exploradas e ensinadas no Ensino Básico. Isso pode estar relacionado à dependência de conceitos de Cálculo e à presença de funções exponenciais que envolvem a constante de Euler (e), temas que também têm difusão limitada nesse nível de ensino. Independentemente das razões, acredita-se que seja viável introduzir esses conteúdos qualitativamente e com o apoio de softwares, antes mesmo do Ensino Superior.

Para delimitar o campo de estudo, analisaram-se dissertações defendidas no PROFMAT, disponíveis na página eletrônica oficial do programa. Foram selecionadas sete dissertações sobre Funções Hiperbólicas, publicadas entre

2013 e 2019, e quatro dissertações relacionadas à curva catenária, datadas entre 2016 e 2019. Complementarmente, analisaram-se duas dissertações externas, uma de 2017 da UFSCAR e outra de 2008 da USP.

O objetivo desta revisão é identificar lacunas nos trabalhos existentes e contribuir para a elaboração de materiais complementares que ampliem as possibilidades pedagógicas para professores de Matemática. Para isso, a análise foi guiada pelos seguintes questionamentos:

1. Como, em linhas gerais, os aspectos históricos são abordados?
2. Como são definidas as funções trigonométricas hiperbólicas?
3. Quais são as aplicações desenvolvidas?
4. Qual o público-alvo?
5. Houve proposta de trabalho para o Ensino Médio? Qual?

2.1 Aspectos Históricos

A maior parte dos trabalhos analisados aborda o desenvolvimento histórico das funções hiperbólicas e da catenária. Destacam-se as contribuições de “Silva (2019)”, “Ferrara (2018)” e “Santos (2015)”, que utilizam “Alhadas (2013)” como referência. Este último se sobressai ao oferecer biografias das principais figuras históricas, explicando suas contribuições ao estudo das funções hiperbólicas. Já “Freitas (2015)” e “Rodrigues (2014)” adotam uma perspectiva crítica em relação aos livros didáticos que tratam do tema, destacando a falta de preocupação com a justificativa das definições em termos de exponenciais.

Uma sugestão para futuros trabalhos é aprofundar a investigação histórica, resgatando demonstrações originais e adaptando-as para a linguagem moderna.

2.2 Definições e Deduções

As definições das funções hiperbólicas variam significativamente entre os trabalhos. “Silva (2019)” e “Freitas (2015)” iniciam com a definição em termos de exponenciais, justificando posteriormente com a parametrização da hipérbole. “Ferrara (2018)” e “Rodrigues (2014)” optam por deduzir as equações a partir da área do setor hiperbólico. Outros, como “Santos (2015)” e “Alhadas (2013)”, apresentam definições mais diretas, mas sem aprofundar o raciocínio matemático subjacente.

2.3 Aplicações Desenvolvidas

As aplicações abordadas nos trabalhos incluem modelos físicos, como cordas suspensas e a equação da catenária. Destaque para “Freitas (2015)” e “Vasconcelos (2013)”, que apresentam demonstrações utilizando integrais e conceitos de forças. No entanto, a maioria dos trabalhos limita-se a aplicações pontuais ou exercícios com substituições de valores, sem aprofundamento investigativo.

2.4 Público-Alvo

Trabalhos como os de “Silva (2019)”, “Ferrara (2018)” e “Alhadas (2013)” são direcionados a professores de Matemática, enquanto “Vasconcelos (2013)” busca atender alunos do Ensino Médio e da graduação. Outros não especificam claramente seu público-alvo, o que poderia ser melhor delineado para orientar futuros leitores e aplicadores.

2.5 Propostas para o Ensino Médio

Uma lacuna significativa identificada foi a falta de propostas concretas voltadas ao Ensino Médio. Embora alguns trabalhos forneçam materiais teóricos, poucos oferecem atividades acessíveis e práticas que possam ser implementadas em sala de aula. Em resposta, este estudo busca preencher essa lacuna, propondo atividades baseadas em jogos e ferramentas digitais que incentivem uma postura investigativa entre os alunos.

Essa revisão evidencia a necessidade de trabalhos que não apenas aprofundem os aspectos teóricos das Funções Hiperbólicas, mas também explorem métodos inovadores de ensino que aproximem esse conteúdo da realidade do Ensino Básico.

3 Funções Trigonométricas Hiperbólicas (FTH)

Seja H um ponto da hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ localizado no primeiro quadrante. O setor hiperbólico gerado pelo ponto H é a região do plano limitada pelo eixo X, pela reta que passa pela origem e pelo ponto H, e pela hipérbole unitária. Sua área será denotada por $A_S(H)$.

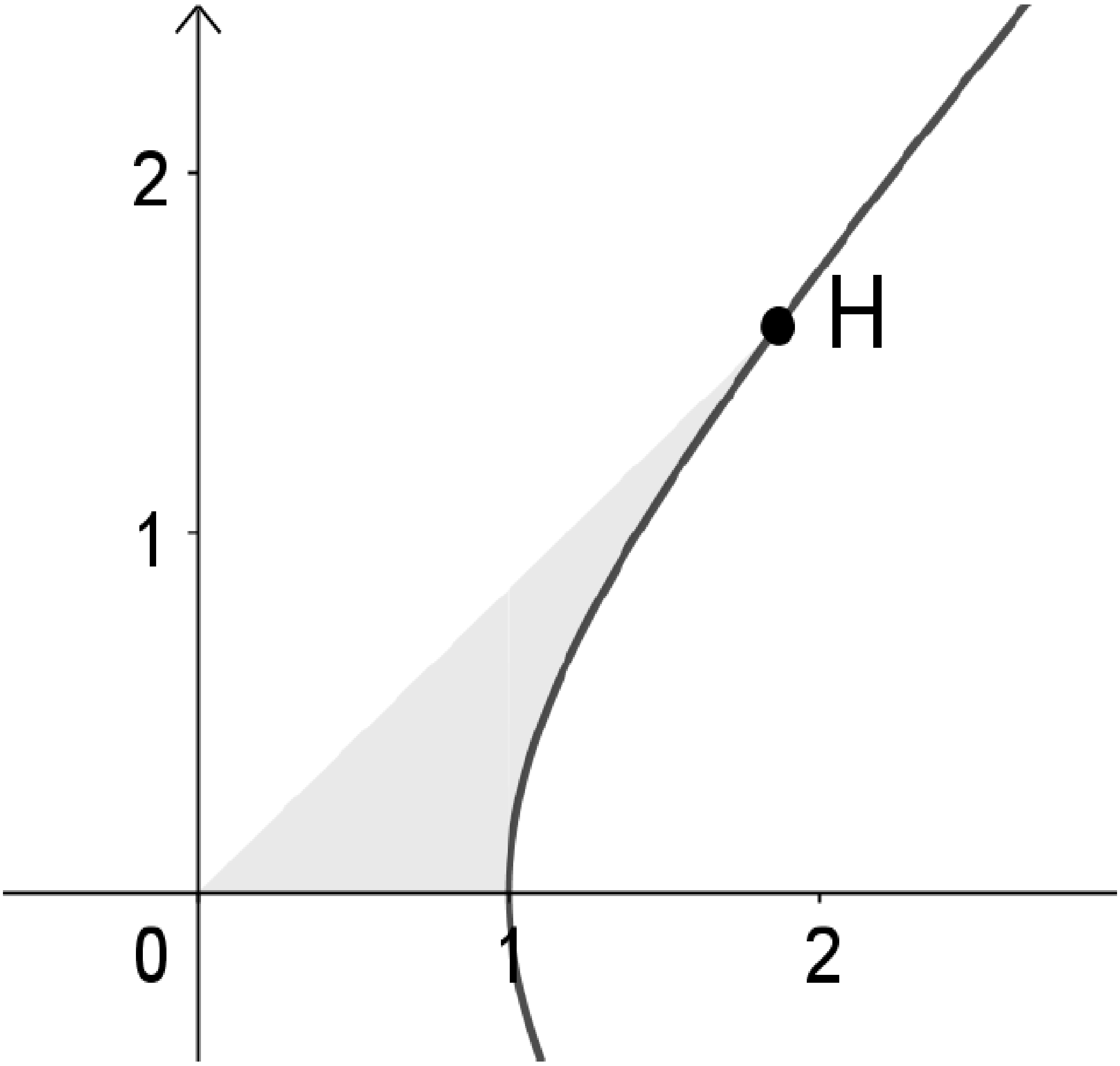
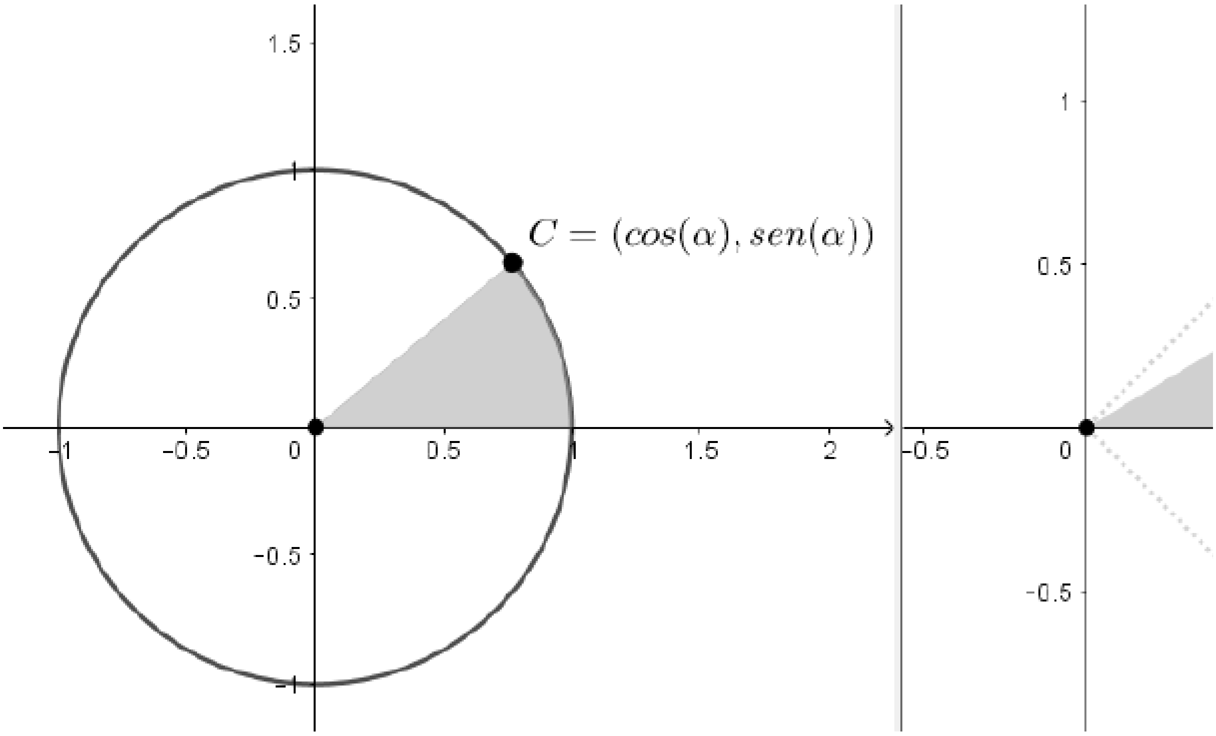


Figura 1: Setor Hiperbólico

O ângulo hiperbólico γ é o dobro da área do setor hiperbólico $A_S(H)$ delimitado pelo ponto H. Ou seja:

$$\gamma = 2A_S(H)$$

Vale ressaltar que γ não é um ângulo no sentido da geometria euclidiana, ou seja, como a região limitada por duas semirretas com origem comum. Contudo, existe uma relação biunívoca entre ângulos e números reais. O ângulo hiperbólico recebe esse nome para conservar a analogia com a parametrização do círculo unitário, onde o ângulo central tem simultaneamente o papel de parâmetro e ângulo α do setor circular.



Note que também existe uma relação biunívoca entre o ângulo hiperbólico e a área do setor hiperbólico correspondente. Quando $H = (1,0)$, a área do setor hiperbólico é zero, e, consequentemente, $\gamma = 0$. Similarmente, quando as coordenadas de H tendem ao infinito, $\gamma \to \infty$.

Enquanto as Funções Hiperbólicas observam uma relação biunívoca entre o ângulo e o setor, as Funções Trigonométricas Circulares observam periodicidade nos resultados obtidos.

O cosseno hiperbólico $\cosh(\gamma)$ e o seno hiperbólico $\sinh(\gamma)$ são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto H da hipérbole unitária cuja área do setor hiperbólico delimitada por H é igual a $\frac{\gamma}{2}$ unidades de área (u.a.).

3.1 Parametrização da Hipérbole

Agora, vamos motivar a definição das Funções Trigonométricas Hiperbólicas em termos de exponenciais, utilizando a parametrização da hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ e a analogia com a área do setor circular no círculo trigonométrico.

Na comparação com o círculo unitário, o ângulo central α desempenha um papel análogo ao γ na definição de seno e cosseno hiperbólicos. Diz-se que um ponto $C = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ pertence ao círculo unitário quando a área do setor circular do ponto $(1, 0)$ até o ponto C é igual a $\frac{\alpha}{2}$ unidades de área.

Agora, determinaremos uma relação entre as coordenadas cartesianas do ponto H pertencente à hipérbole unitária e a definição do seno e cosseno hiperbólicos.

Devido à simetria, vamos parametrizar apenas o primeiro quadrante. Defina-se a função $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ por:

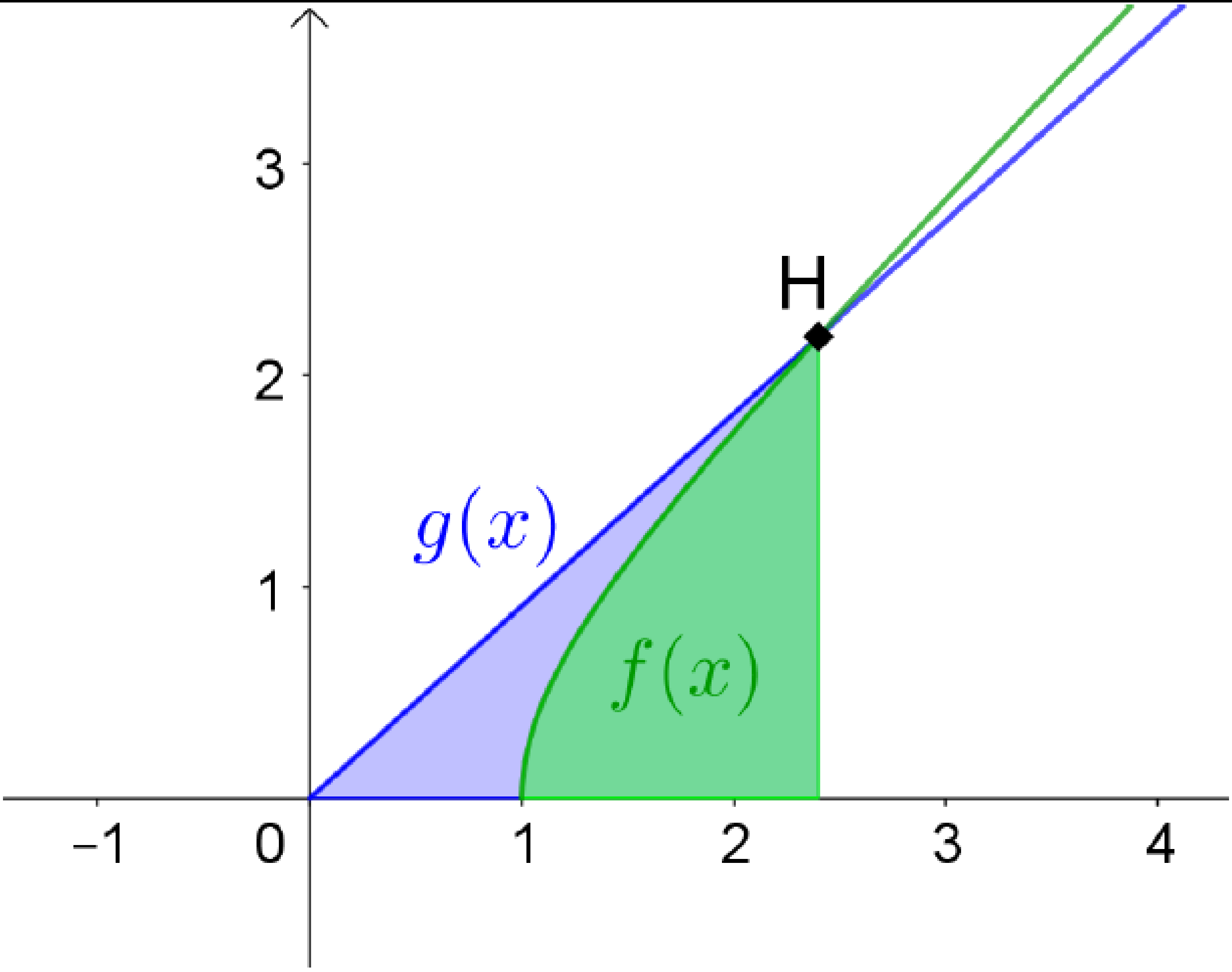
$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

que modela o ramo superior direito da hipérbole unitária. E considerando a função $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$ definida por:

$$g(x) = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)} x$$

com $\cosh(\gamma) \neq 0$, que modela a semirreta que se inicia na origem e passa pelo ponto $H = (\cosh(\gamma), \sinh(\gamma)) = (x, \sqrt{x^2 - 1})$.

Após definir as funções cujos gráficos limitam a área do setor hiperbólico, podemos calcular sua área em termos de integrais.



A área do setor hiperbólico é a diferença entre as áreas abaixo dos gráficos de $g(x)$ e $f(x)$, respectivamente, no intervalo de $x = 0$ até a abscissa $x = \cosh(\gamma)$ do ponto H.

Com isso, expressamos a área do setor hiperbólico em termos de integrais da seguinte maneira:

$$A_S(H) = \frac{\gamma}{2} = \int_0^{\cosh(\gamma)} g(x)\,dx - \int_1^{\cosh(\gamma)} f(x)\,dx$$

$$\frac{\gamma}{2} = \int_0^{\cosh(\gamma)} \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)} x\, dx - \int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2-1}\, dx$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)} \frac{[\cosh(\gamma)^2 - 0^2]}{2} - \int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2-1}\, dx$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sinh(\gamma)\cosh(\gamma)}{2} - \int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2-1}\, dx$$

Logo, chegamos à expressão final:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma))}{2}$$

Ou, simplificando:

$$\gamma = \ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma))$$

Isso implica na fórmula:

$$e^{\gamma} = \cosh(\gamma) + \sinh(\gamma)$$

Como o ponto $H = (\cosh(\gamma), \sinh(\gamma))$ pertence à hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, temos que:

$$\cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) = 1$$

Multiplicando as expressões obtidas para e^{γ} e $e^{-\gamma}$:

$$e^{\gamma}[\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma)] = 1$$

Logo, temos:

$$\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) = e^{-\gamma}$$

Somando as equações para e^{γ} e $e^{-\gamma}$, obtemos a relação para o $\cosh(\gamma)$:

$$e^{\gamma} + e^{-\gamma} = 2\cosh(\gamma)$$

Portanto:

$$\cosh(\gamma) = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2}$$

E, subtraindo as equações, obtemos a relação para o $\sinh(\gamma)$:

$$\sinh(\gamma) = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2}$$

Essas equações condensam as relações fundamentais que definem as Funções Hiperbólicas.

4 Proposta de Sequência Didática

O objetivo desta seção é organizar e propor diretrizes para uma sequência didática que norteie o ensino das funções hiperbólicas em sala de aula. Schneuwly e Dolz (2004) entendem uma “sequência didática” como um conjunto de atividades escolares organizadas sistematicamente com a finalidade de ajudar o aluno a dominar melhor o conteúdo.

Com essa sequência, não pretendemos fornecer nenhuma “fórmula mágica” ou “receita infalível” para ensinar funções hiperbólicas ou qualquer outro conteúdo. Esperamos que o docente utilize as sugestões apresentadas como inspiração, adaptando-as à realidade de sua sala de aula.

As tarefas e atividades propostas abrangem três dimensões: conceitual, procedimental e atitudinal, conforme Coll e colaboradores (2000). Os objetivos de aprendizagem respeitam o nível cognitivo dos alunos e são organizados em três níveis: básico, intermediário e avançado.

4.1 Estrutura da Sequência

A sequência é composta por quatro momentos principais:

1º Momento: Apresentação do Projeto

Neste momento inicial, o professor expõe os objetivos do trabalho, o tempo estimado e o que será aprendido. Também é a oportunidade de introduzir o tema das funções hiperbólicas, como a catenária, através do problema histórico de descrever as equações de uma corda suspensa.

2º Momento: Produção Inicial

Este momento permite avaliar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema. Um exemplo de atividade é usar um pedaço de barbante para formar uma catenária e pedir aos alunos que comentem ou escrevam sobre suas observações. A ideia é estimular hipóteses iniciais, como "o barbante pendurado é uma parábola".

3º Momento: Atividades

O núcleo da sequência está nas atividades que utilizam o software Geogebra para explorar as funções hiperbólicas. As atividades permitem aos alunos investigar, modelar e compreender os conceitos de maneira interativa. Algumas atividades propostas incluem:

Atividade 1 - Corda Suspensa
Endereço: https://www.geogebra.org/m/twyhnnks

Ao introduzir um novo conteúdo, especialmente em matemática, é fundamental proporcionar aos alunos um momento de ambientação, contextualização e familiarização com o objeto de estudo. No caso das funções hiperbólicas, nosso objetivo é explorar suas propriedades fundamentais e aplicações práticas de maneira significativa e acessível.

A função cosseno hiperbólico, $f(x) = a\cosh(bx) + c$, é reconhecida como a que modela a curva de uma corda suspensa que sustenta apenas seu próprio peso. Embora esta propriedade possa ser demonstrada matematicamente, é essencial, sobretudo no início do aprendizado, convencer os alunos de que essa hipótese é plausível. Assim, a atividade busca despertar curiosidade e permitir que os estudantes explorem a ideia por meio de experimentos e modelagens práticas antes de mergulhar em cálculos e demonstrações formais.

Esta atividade destina-se, predominantemente, ao nível básico. Contudo, sua abordagem flexível permite que seja adaptada para turmas de diferentes níveis. Em turmas mais avançadas, as discussões e análises podem ser aprofundadas, ampliando os objetivos de aprendizagem. Por outro lado, atividades mais complexas de níveis intermediário e avançado podem não ser adequadas para alunos iniciantes.

Para tornar a experiência mais interativa, sugere-se que os alunos fotografem cordas suspensas observadas em seu cotidiano ou pesquisem imagens na internet. Essas imagens podem ser importadas para o software Geogebra, onde os alunos terão a oportunidade de modelar catenárias, descobrir suas equações e testar hipóteses.

Objetivos de Aprendizagem

Nível Básico:

- Conhecer a função $f(x) = a\cosh(bx) + c$.
- Investigar como os parâmetros a, b e c influenciam no formato do gráfico.
- Reconhecer que o cosseno hiperbólico modela curvas naturais, como as formadas por cordas suspensas.

Nível Intermediário:

- Relacionar os exemplos fornecidos com outros não apresentados durante a atividade.
- Produzir exemplos próprios e inseri-los no Geogebra para análise.

Atividade 2 - Investigando Catenárias em Outros Planetas

Endereço: https://1drv.ms/x/s!Ao4A4XiZWRXLgatMieNJRxZfUm87QQ?e=072qby

Com base em uma tabela de valores obtida computacionalmente, os alunos verificam como a aceleração da gravidade afeta o formato da catenária. Concluem que o formato da curva independe do planeta, dada a constância da razão T_0/p na equação

$$y = \frac{T_0}{p}[\cosh(px/T_0) - 1]$$

A dedução desta equação é recomendada para turmas de nível avançado. Para uma turma de nível intermediário, é suficiente colocarmos esta fórmula no GeoGebra para que os alunos entendam a influência dos parâmetros no formato final da catenária.

Objetivos

Nível Intermediário: Construir uma tabela em Excel ou LibreOffice Calc testando, em diversas cordas, como variam os parâmetros p e T_0 e, em particular, como varia a razão T_0/p. Verificar que a razão T_0/p é uma constante e que, consequentemente, uma corda assumirá o mesmo formato em qualquer planeta.

Nível Avançado: Encontrar a equação diferencial dos cabos flexíveis e deduzir a equação da catenária.

Atividade 3 - Jogo do Comprimento x Área

Link: https://www.geogebra.org/m/ajrwpfs2

Utilizando o Geogebra, os alunos verificam que a curva catenária possui a propriedade única de ter comprimento igual à área sob seu gráfico. O objetivo é demonstrar essa característica de maneira experimental e analítica. A catenária é uma curva que tem seu comprimento numericamente igual à área sob seu gráfico para qualquer intervalo.

Neste jogo, o aluno pode digitar no campo de entrada qualquer função que ele conheça e movimentar os pontos A e B livremente. O programa calcula automaticamente o comprimento da curva em vermelho entre os pontos indicados e a área abaixo do gráfico em azul.

Objetivos

Nível Básico: Testar uma lista de funções pré-estabelecidas para verificar como o comprimento de arco e a área variam.

Nível Intermediário: Construir a melhor função possível para tentar solucionar o problema.

Nível Avançado: Demonstrar que o cosseno hiperbólico soluciona o problema e verificar se a solução é única.

Atividade 4 - Aproximação da Catenária por Parábolas

Endereço: https://www.geogebra.org/m/myzcbfev

Esta atividade visa trabalhar a diferenciação entre a curva catenária e a parábola. O aluno pode dar um valor para a razão T_0/p, que unicamente define a catenária, e observará como a razão flecha-vão é influenciada por esta razão e pelo intervalo de integração.

Objetivos

Nível Intermediário: Discutir os critérios para considerar uma parábola como "boa" aproximação da catenária.

Nível Avançado: Encontrar, através do polinômio de Taylor, qual é a melhor parábola que aproxima uma catenária e calcular o erro associado.

4º Momento: Produção Final

Neste momento, os alunos apresentam os resultados obtidos, discutem hipóteses iniciais e analisam como seus conhecimentos evoluíram. O objetivo é consolidar o aprendizado e promover reflexões sobre o processo de investigação.

5 Conclusão

O estudo das propriedades da catenária não apenas apresenta uma oportunidade única para conectar diferentes áreas da matemática, como também evidencia sua relevância prática em problemas de engenharia e ciências aplicadas. Através das atividades propostas, procuramos explorar a profundidade desse tema de maneira progressiva, adaptando-o a diferentes níveis de conhecimento e interesses dos estudantes. Desde o simples reconhecimento da curva como solução à equação diferencial de cabos até sua comparação com aproximações parabólicas, a catenária nos conduz por um caminho rico em interpretações matemáticas e concepções físicas.

Um dos aspectos mais fascinantes abordados foi a universalidade da razão $\frac{T_0}{p}$, que demonstra que o formato da curva é independente do planeta em que se encontra, desde que mantidas as condições de massa, comprimento e vão constantes. Este conceito não apenas desafia os alunos a pensarem de forma criativa e interdisciplinar, mas também os convida a explorar como as leis físicas mantêm sua consistência em diferentes contextos gravitacionais.

Além disso, o jogo “Comprimento x Área” revelou-se uma ferramenta poderosa para estimular a curiosidade dos estudantes, permitindo-lhes investigar como diferentes funções se comportam em relação a duas propriedades aparentemente desconexas, mas intrinsecamente ligadas na catenária. A interatividade e liberdade no uso da ferramenta tornam a experiência de aprendizagem mais envolvente e significativa.

A atividade de aproximação da catenária por parábolas trouxe à tona um elemento clássico na história da matemática: a busca por soluções simplificadas que se aproximam da realidade. Os cálculos comparativos entre o comportamento parabólico e o catenário revelam que, embora os dois modelos possam ser visualmente semelhantes em certas condições, suas diferenças podem ser quantitativamente significativas dependendo das aplicações práticas. Tal discussão permite que os alunos desenvolvam um olhar crítico e argumentativo diante de situações que demandam modelagem.

Por fim, os exercícios propostos consolidaram o aprendizado ao propor desafios reais com aplicações diretas das equações deduzidas. Este processo não apenas reforça os conceitos matemáticos e físicos subjacentes, mas também capacita os estudantes a realizarem interpretações gráficas e numéricas que vão além da simples resolução mecânica de equações.

Ao integrar aspectos de modelagem, análise computacional e interpretação de resultados, este estudo da catenária se configura como um exemplo robusto de como a matemática pode ser explorada de forma interdisciplinar, criativa e significativa. Convidamos os leitores, sejam educadores ou estudantes, a ampliarem as aplicações e variações das atividades propostas, sempre buscando novas formas de enriquecer a compreensão e o ensino da matemática em contextos reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBENA, E.; SALAMON, S.; GRAY, A. Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. [S.l.]: CRC Press, 2017.

AGARWAL, A.; MARENGO, J. The locus of the focus of a rolling parabola. v. 41, n. 2, p. 129–133, March 2010.

ALHADAS, M. d. C. Dissertação PROFMAT, Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações. Campos dos Goytacazes: UENF, 2013. 73 f.

BINOTI, D. H. B. et al. Aplicação da função hiperbólica na construção de curvas de Índice de local. 2012.

BRUNT, B. van. The calculus of variations. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004. 38–40 p.

COLL, C. et al. Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. In: Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. [S.l.: s.n.], 2000. p. 182–182.

COURANT, R.; HILBERT, D. Methods of mathematical physics: partial differential equations. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. 184 p.

CREW, H.; SALVIO, A. d. Dialogues Concerning Two New Sciences. 1. ed. New York, NY: Dover Publications Inc., 1954.

ELMORE, W. C.; HEALD, M. A. Physics of waves. [S.l.]: Courier Corporation, 1985.

FERRARA, M. V. Dissertação PROFMAT, Uma Proposta para Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio. Maringá: UEM, 2018. 74 f.

FREITAS, M. d. B. C. d. S. B. Dissertação PROFMAT, Uma Proposta para Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio. João Pessoa: UFPB, 2015. 61 f.

GROSSE, J. et al. Acta eruditorum: anno M DC LXXXX publicata. Prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium, 1690.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentals of Physics. Wiley, 2018. ISBN 9781119286240.

LIMA, G. S. d. Dissertação PROFMAT, As Formas Geométricas nas Obras de Gaudí: As Superfícies Quádricas, As Superfícies Regradas e a Catenária. Fortaleza: UECE, 2019. 88 f.

LOCKWOOD, E. H. A book of curves. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967.

MAIA, F. E. P. Dissertação PROFMAT, Curvas Planas: Clássicas, Regulares e de Preenchimento. Santo André: UFABC, 2016. 71 f.

MAOR, E. E: a história de um número. Record, 2003. ISBN 9788501058478.

MARKUSHEVICH, A. Remarkable Curves. Mir, 1980. (Little Mathematics Library).

MARTINS, F. A. d. O. Dissertação PROFMAT, Explorando Algumas Curvas Notáveis no Ensino Médio: História, Propriedades e Aplicações. Rio de Janeiro: Colégio Pedro II, 2019. 121 f.

MENDES, M. F. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, A Curva Catenária como Aplicação da Função Exponencial.

Sorocaba: UFSCar, 2017. 81 f.

MERIAM, J.; KRAIGE, L.; BOLTON, J. Statics. Wiley, 2016. (Engineering Mechanics). ISBN 9781119044673.

MICHAELIS, D. d. L. P. Dicionário online. Editora Melhoramentos, 2021.

OJOSE, B. Students' misconceptions in mathematics: Analysis of remedies and what research says. Ohio Council of Teachers of Mathematics, 2015.

OTERO, M. L. G. Dissertação PROFMAT, Galileu Galilei e o Conceito da Corrente Suspensa, uma Proposta de Investigação no Ensino Médio. Salvador: UFBA, 2019. 56 f.

RODRIGUES, K. F. Dissertação PROFMAT, Ângulo Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas. São Cristóvão: UFSF, 2014. 68 f.

SANTOS, J. J. C. d. Dissertação PROFMAT, Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas. João Pessoa: UFPB, 2015. 77 f.

SCHNEUWLY, B.; DOLZ-MESTRE, J. Gêneros orais e escritos na escola. [S.l.]: Mercado de Letras, 2004.

SILVA, C. M. d. PROFMAT, As funções hiperbólicas no ensino médio. Apresentação, conceitos e aplicações. Dourados: UEMS, 2019. 57 f.

STEWART, J. Cálculo. Vol. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TALAVERA, L. M. B. Programa de Pós-Graduação em Educação, Parábola e catenária: história e aplicações. São Paulo: USP, 2008. 97 f.

TRUESDELL, C. The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638–1788, as Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series II, Volume 11, Part 2. Switzerland: Fussli, 1960. p. 21.

VASCONCELOS, J. G. S. F. Dissertação PROFMAT, Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações. Manaus: UFAM, 2013. 74 f.

YATES, R. C. Curves and their properties. ERIC, 1974.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. Física 1 - Mecânica. [S.l.]: Pearson Universidades, 2016. v. 1.